1 Recasages

- **204 :** Connexité. Exemples d'applications.
- **214 :** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.
- **215 :** Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème:

Soient $(E, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $f : E \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in E,\ df_x$ est une isométrie de E.
f est alors une isométrie affine.

Preuve :

- On norme $\mathcal{L}(E)$ avec la norme :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ |||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

On a donc que pour tout $x \in E,\ |||df_x||| = 1$ et par inégalités des accroissements finies on a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \tag{1}$$

- Soit $a \in E,\ df_a$ est une isométrie, elle est donc inversible.
Par théorème d'inversion locale, il existe un voisinage de a ouvert V_a tel que $f_{|V_a}$ est une $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_a sur $W_a = f(V_a)$.

Soit $g : W_a \to V_a$ la difféomorphisme inverse.
Quitte à considérer $B \subset W_a$ une boule ouverte contenant a et à remplacer V_a par $g(B)$, on peut supposer que W_a est une boule ouverte, donc convexe.
Ainsi, par inégalité des accroissements finis appliquée à g on a :

$$\forall (x,y) \in V_a^2,\ \|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leq \sup_{z \in [f(x), f(y)]} \|dg_z\| \cdot \|f(x) - f(y)\|$$

Or, d'après le théorème d'inversion locale on a :

$$\forall z \in W_a,\ dg_z = \left(df_{g(z)}\right)^{-1} \in \mathcal{O}(E) \implies \forall (x,y) \in V_a^2,\ \sup_{z \in [f(x), f(y)]} \|dg_z\| = 1$$

Et donc :

$$\forall (x,y) \in V_a^2,\ \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \tag{2}$$

En combinant les résultats (1) et (2) on a :

$$\forall (x,y) \in V_a^2,\ \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \tag{3}$$

- De manière équivalente, pour tout $x, y \in V_a$ on a :

$$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle$$

On différentie cette expression par rapport à x et on évalue en $h \in E$, on a ainsi :

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y)\rangle + \langle f(x) - f(y), df_x(h)\rangle = \langle h, x - y\rangle + \langle x - y, h\rangle$$

Et donc :

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y)\rangle = \langle h, x - y\rangle$$

On différentie par rapport à y et on évalue en $l \in E$, on a ainsi :

$$\langle df_x(h), df_y(l)\rangle = \langle h, l\rangle$$

On déduit de ce résultat :

$$\begin{aligned} \|df_x(h) - df_y(h)\| &= \|df_x(h)\|^2 - 2\langle df_x(h), df_y(h)\rangle + \|df_y(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\langle h, h\rangle + \|h\|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

On a donc que pour tout $h \in E,\ df_x(h) = df_y(h)$.
D'où $df_x = df_y$.
La différentielle de f est constante sur V_a.

- Soit alors $\Gamma = \{x \in E,\ df_x = df_0\}$.
D'après ce qui précède, pour tout $a \in \Gamma \subset E$, il existe $V_a \subset E$ tel que pour tout $x, y \in V_a^2,\ df_x = df_y$.
Or $a \in V_a$ donc on a pour tout $x \in V_a,\ df_x = df_a = df_0$. C'est-à-dire que $x \in \Gamma$
Ainsi $V_a \subset \Gamma$ pour tout a donc Γ est ouvert.

Par ailleurs, $\Gamma = (df)^{-1}(\{df_0\})$ est fermé car f est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé.
On a donc que Γ est ouvert et fermé.
Or E est connexe (car convexe), on a donc que $\Gamma = E$.

On pose $u = df_0 \in \mathcal{O}(E)$, on a donc que pour tout $x \in E,\ df_x = u$.
Ainsi, la fonction $f - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de différentielle nulle sur E et donc c'est une fonction constante $\alpha \in E$.
On a donc :

$$\forall x \in E,\ f(x) = u(x) + \alpha$$

$u = df_0$ étant une isométrie, on a que f est une isométrie affine.

3 Compléments

- Savoir démontrer qu'une boule ouverte est convexe.
- Savoir démontrer que si la différentielle d'une fonction est nulle sur un ouvert connexe alors la fonction est constante.
  Un ouvert connexe est connexe par ligne brisée, on raisonne donc par lignes brisées et on applique l'inégalité des accroissements finis sur chaque segment.
- Savoir démontrer le théorème d'inversion locale (avoir une idée à minima).

4 Références

- Analyse, *Gourdon*