1 Recasages

- **204 :** Connexité. Exemples d'applications.
- **205 :** Espaces complets. Exemples et applications.
- **206 :** Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- **214 :** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

2 Développement

Théorème:

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et $f : E \to E$. f est dite strictement s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \ \geq \ k\|x-y\|^2$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Preuve :

- Etape 1:
  Montrons que :

  $$f \text{ est strictement monotone} \iff \forall x \in E, \forall h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \ \geq k\|h\|^2$$

  – On suppose que f est strictement monotone.
  Il existe alors $k > 0$ tel que pour tout $x, h \in E$ et $t \in \mathbb{R}^*$:

  $$\langle f(x+th) - f(x), th \rangle \ \geq kt^2\|h\|^2 \iff \left\langle \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, h \right\rangle \geq k\|h\|^2$$

  On a donc bien le résultat en faisant tendre t vers 0, par continuité du produit scalaire.

  – On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x, h \in E$:

  $$\langle df_x(h), h \rangle \ \geq k\|h\|^2$$

  On considère l'application :

  $$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle f(x+th), h \rangle \end{array} \right.$$

  Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\varphi'(t) = \langle df_{x+th}(h), h \rangle \geq k\|h\|^2$$

  On intègre cette expression pour t allant de 0 à 1 :

  $$\varphi(1) - \varphi(0) \geq k\|h\|^2 \implies \langle f(x+h) - f(x), h \rangle \geq k\|h\|^2$$

  D'où pour $y = x + h$ on a :

  $$\langle f(t) - f(x), y - x \rangle \geq k\|y-x\|^2$$

  f est donc strictement monotone.

- Etape 2 :
  f étant de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, pour montrer que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème d'inversion global, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, df_x est inversible, f est une bijection de E sur E.

  Pour le théorème d'inversion global, il suffit de l'injectivité de f or on veut montrer que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E dans E, il nous faut donc la surjectivité.

  – Soit $x \in E$, f étant strictement monotone, on a d'après l'étape 1 que pour tout $h \in E$:

  $$\langle df_x(h), h \rangle \geq k\|h\|^2 \implies (h \neq 0 \implies df_x(h) \neq 0)$$

  Ainsi df_x est injective et donc bijective car E est de dimension finie et df_x est un endomorphisme.
  Donc df_x est inversible et de classe $\mathcal{C}^0$ (car f est de classe $\mathcal{C}^1$).

  – On a que f est strictement monotone donc pour tout $x, y \in E$ on a :

  $$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k\|x-y\|^2 \geq 0$$

  Donc :

  $$f(x) = f(y) \implies x = y$$

  Donc f est injective.
  Montrons que f est surjective.

  On veut montrer que $f(E) = E$. E étant connexe, il suffit de montrer que $f(E)$ est un ouvert fermé de E.

  ∗ Soit $x \in E$, df_x est inversible donc f est une application ouverte et E étant ouvert, on a que $f(E)$ est ouvert.

* Pour montrer que $f(E)$ est fermé dans E, on va montrer que $f(E)$ est complet.
  f étant strictement monotone, par inégalité de Cauch-Schwarz on a :

$$\begin{cases} |\langle f(x)-f(y), x-y\rangle| & \leq & \|f(x)-f(y)\| \cdot \|x-y\| \\ k\|x-y\|^2 & \leq & \langle f(x)-f(y), x-y\rangle \end{cases}$$

  D'où :

$$\|x-y\| \leq \frac{1}{k}\|f(x)-f(y)\|$$

  Soit une suite de Cauchy $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $f(E)$.
  Pour p, q deux entiers suffisamment grand on a :

$$\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{k}\|f(x_p)-f(x_q)\|$$

  Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E donc converge (E est complet car c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{R}$ est complet).
  Notons x sa limite.
  On a alors $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ par continuité de f.
  La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $f(x) \in E$, $f(E)$ est donc complet.
  $f(E) \subset E$ est donc fermé.

On a donc que $f(E)$ est ouvert et fermé donc connexe donc $f(E) = E$.
f est donc surjective et donc bijective.

f est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme par théorème d'inversion global.

3 Compléments

- Toute application linéaire en dimension finie est continue.
  Découle de l'équivalence des normes en dimension finie et qu'une application linéaire g est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout y, $\|g(y)\|_1 \leq C\|y\|_2$.

- Soient E, F deux espaces de Banach et $U \subset E$ ouvert et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $x \in U$, df_x est inversible. Alors f est une application ouverte.
  Soit Ω un ouvert de U et $x \in \Omega$.
  Par théorème d'inversion locale, il existe $V_x \subset \Omega$ un voisinage ouvert de x et W_x une voisinage ouvert de $f(x)$ tels que $f : V_x \to W_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
  En particulier on a $f(V_x) = W_x$ (par sujectivité) donc on a :

$$f(\Omega) = f\left(\bigcup_{x\in\Omega} V_x\right) = \bigcup_{x\in\Omega} f(V_x) = \bigcup_{x\in\Omega} W_x$$

  L'image d'un ouvert par f est donc un ouvert, d'où le résultat.

- $F \subset E$ complet $\implies$ F fermé.
  Soit (a_n) une suite d'élément de F convergeant vers $a \in E$. Montrons que $a \in F$.
  On a donc que (a_n) est une suite de Cauchy de F qui est complet, donc (a_n) admet une limite dans F.
  D'où $a \in F$, donc F est fermé par caractérisation séquentielle.

- Savoir démontrer (même partiellement) les théorèmes d'inversions locale et globale.
  Il s'agit de poser une fonction convenable et d'appliquer le théorème de point fixe de Banach.

4 Références

- Analyse, *Gourdon*