1 Recasages

- **235 :** Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- **236 :** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- **239 :** Fonctions dé nies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- **244 :** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- **245 :** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème: Soit $x \in]0,+\infty[$ et $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, on a :

$$\forall s \in]0,1[,\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} r^{-s}e^{-r}dr\right)t^{s-1}e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} r^{-s}t^{s-1}e^{-r}e^{-t}drdt\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^s\frac{e^{-(r+t)}}{t}drdt\end{aligned} \tag{1}$$

On effectue le changement de variable suivant (qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de ${\mathbb{R}_+^*}^2$ sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$) :

$$\varphi(r,t) = \left(r+t, \frac{t}{s}\right) \implies \varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$$

On a par ailleurs :

$$\det J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

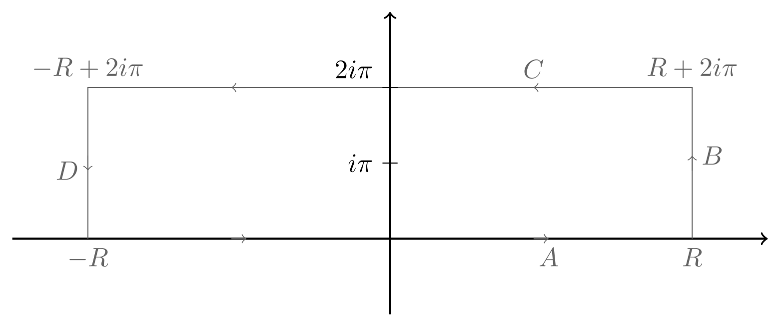
D'où (1) devient :

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^s\cdot\frac{1+v}{uv}\cdot e^{-u}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}dudv\\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u}du}_{=1}\int_0^{+\infty}\frac{v^{s-1}}{1+v}dv\end{aligned} \tag{2}$$

On pose $v = e^x$ et donc (2) devient :

$$I(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{sx}}{1+e^x}dx \tag{3}$$

Soit $f(z) = \dfrac{e^{sz}}{1+e^z}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(i\pi + 2i\pi\mathbb{Z})$.
Pour exprimer plus simplement I, on applique le théorème des résidus sur le contour C_R défini par un rectangle de sommets d'affixe $-R,\ R,\ R+2i\pi,\ -R+2i\pi$ (représenté ci-dessous).



Ce contour enferme seulement un pôle de f à savoir $i\pi$. On calcule le résidu de f en $i\pi$ d'où :

$$(z-i\pi)f(z) = e^{sz}\frac{z-i\pi}{e^z-e^{i\pi}} \underset{z\to i\pi}{\longrightarrow} e^{is\pi}e^{i\pi} = -e^{is\pi}$$

On a donc, d'après le théorème des résidus :

$$-2i\pi e^{is\pi} = \int_{C_R} f = I_A(R) + I_B(R) + I_C(R) + I_D(R) \tag{4}$$

Etudions les intégrales $I_A(R), \ldots, I_D(R)$ lorsque $R \to +\infty$.
On a :

- $$|I_B(R)| = \left|\int_R^{R+2i\pi} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{s(R+i\theta)}}{1+e^{R+i\theta}}d\theta\right| \le Ce^{(s-1)R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5}$$

- $$|I_D(R)| = \left|\int_{-R+2i\pi}^{-R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+i\theta)}}{1+e^{-R+i\theta}}d\theta\right| \leq C'e^{-sR} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

- $$I_C(R) = \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(z)dz = \int_R^{-R} f(2i\pi+x)dx = -e^{2i\pi s}I_A(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{2i\pi s}I(s) \tag{7}$$

On a donc d'après (4) :

$$-2i\pi e^{is\pi} = \underbrace{I_A(R) + \underbrace{I_B(R)}_{\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0} + \underbrace{I_C(R)}_{=-e^{2i\pi s}I_A(R)} + \underbrace{I_D(R)}_{\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0}}_{\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}(1-e^{2i\pi s})I(s)}$$

On a donc au final :

$$I(s) = -\frac{2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

D'où le résultat.

3 Compléments

- Le résultat est vrai pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) \in]0,1[$.
  En effet, les fonctions Γ et $z \mapsto \frac{1}{\sin(\pi z)}$ sont holomorphes sur l'ouvert convexe :

  $$\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(s) \in]0,1[\}$$

  On conclut alors par principe de prolongement analytique que :

  $$\forall s \in \Omega,\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

- Savoir démontrer que Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$.
  Application classique du théorème d'holomorphie sous l'intégrale.

- Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ qui ne s'annule pas, admettant des pôles simples en $-n$ de résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$.
  En effet, soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(s) < 1$, on a :

  $$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)\Gamma(1-s)} \neq 0$$

  Le membre de droite est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) < 1, -z \notin \mathbb{N}\}$.
  Par unicité du prolongement analytique, Γ se prolonge sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ avec cette expression donc ne s'annule pas.

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \{z \in \mathbb{C},\ \Re(s) \in]0,1[\}$$
  $$\begin{aligned}(z-(-n))\Gamma(z) &= \frac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} \\ &= (-1)^n\frac{\pi(z+n)}{\sin(\pi(z+n))\Gamma(1-z)} \\ &\underset{z\to-n}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\end{aligned} \tag{8}$$

4 Références

- Complex analysis, *Stein*, *Shakarchi*