

1 Recasages

- **224** : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- **228** : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème:

Soient $n \geq 2$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ pour laquelle il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M$ on ait :

$$f^{(m)}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Alors on a :

$$f(1) + \dots + f(n) = T_m(n) + C + R_m(n)$$

Avec :

$$\begin{cases} T_m(n) &= \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(n) \\ C &= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \\ R_m(n) &= (-1)^m \int_n^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

Où les B_k sont les nombres de Bernoulli et les b_k les polynômes de Bernoulli définis sur $[0, 1[$ et prolongé par 1-périodicité.

Preuve :

- Etape 1:

On calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

On commence par définir une suite de polynômes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis sur $[0, 1[$ tels que pour tout entier n :

$$p'_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad p_0 = 1$$

On a alors par intégration par parties successives (qui sont licites car les p_n sont

des polynômes et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)p_0(x)dx \\ &= [f(x)p_1(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)p_1(x)dx \\ &= [f(x)p_1(x)]_0^1 - [f(x)p_2(x)]_0^1 + \int_0^1 f^{(2)}(x)p_2(x)dx \end{aligned}$$

IPP successives = ...

$$= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(x)p_k(x) \right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 p_m(x)f^{(m)}(x)dx \quad (1)$$

On peut prendre par exemple pour tout $n \geq 2$, $p_n(0) = p_n(1)$.

Ceci équivaut à $\int_0^1 p_n(x)dx = 0$.

Cette condition nous assure donc bien de l'unicité de la famille de polynômes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En effet on a $p'_1 = p_0$ d'où $p_1(x) = x + C_1$.

Or $\int_0^1 p_1(x)dx = \frac{1}{2} + C_1 = 0$.

D'où $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

On construit de même tous les p_n :

$$p'_{n+1}(x) = p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \implies p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C_{n+1}$$

Où C_{n+1} est déterminé par la condition $\int_0^1 p_{n+1}(x)dx = 0$.

On se ramène alors à une suite de polynômes déjà connu, à savoir les polynômes de Bernoulli, en posant :

$$p_n(x) = \frac{B_n(x)}{n!}$$

et les nombres de Bernoulli :

$$B_n = B_n(0)$$

On réécrit alors (1) avec les nouvelles notations et on a :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} \left[f^{(k-1)} \right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \quad (2)$$

• Etape 2:

On 1-périodise la suite de polynômes (B_k) définis sur $[0, 1[$ pour l'étendre sur $\mathbb{R}$.
On introduit donc :

$$b_k(x) = B_k(x - E(x))$$

Soient p, q deux entiers, on applique l'égalité (2) à la fonction $x \mapsto f(x + l)$ pour tout $p \leq l < q$:

$$\begin{aligned} \int_l^{l+1} f(x)dx &= \frac{f(l) + f(l+1)}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} \left[f^{(k-1)} \right]_l^{l+1} \\ &\quad + (-1)^m \int_l^{l+1} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \end{aligned} \quad (3)$$

On somme (3) pour l allant de p à $q-1$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_p^q f(x)dx &= \frac{f(p)}{2} + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{f(q)}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} \left[f^{(k-1)} \right]_p^q \\ &\quad + (-1)^m \int_p^q \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx \end{aligned} \quad (4)$$

On réarrange les termes et on prend $p = 1$ et $q = n$ et on a donc :

$$\begin{aligned} f(1) + \dots + f(n) &= \int_1^n f(x)dx + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} \left[f^{(k-1)} \right]_1^n \\ &\quad + (-1)^{m+1} \int_1^n \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx + \frac{f(1) + f(n)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

La dernière intégrale de (5) n'a aucune raison de converger vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Or, par hypothèse sur f , on a qu'il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M$:

$$f^{(m)}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a alors que $\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$ est convergente.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} f(1) + \dots + f(n) &= \underbrace{\int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(n)}_{=T_m(n)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(1) - (-1)^m \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx}_{=C_m} \\ &\quad + \underbrace{(-1)^m \int_n^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx}_{=R_m(n)} \end{aligned} \quad (6)$$

Il reste donc simplement à montrer que C_m est bien une constante et ne dépend ni de n ni de m . On montre donc pour cela que $C_m = C_{m+1}$

On remarque dans un premier temps que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

D'où en intégrant par parties on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \right]_k^{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x)dx \end{aligned}$$

Série télescopique

$$= -\frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(1) - \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x)dx \quad (7)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 C_m &= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k} f^{(k-1)}(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x) dx \\
 &= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k} f^{(k-1)}(1) \\
 &\quad + (-1)^{m+1} \left(-\frac{B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(1) - \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) dx \right) \\
 &= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{(-1)^k B_k}{k} f^{(k-1)}(1) + (-1)^{m+2} \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) dx \\
 &= C_{m+1}
 \end{aligned} \tag{8}$$

D'où le résultat.

3 Compléments

- Une formule utile qui sert en outre à déterminer des développements asymptotiques :

– Si on prend $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, qui respecte bien les hypothèses du théorème on a :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x^2}}_{=1-\frac{1}{n}} + C + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

– Si on prend $x \mapsto \ln(1+x)$ on a un développement asymptotique de $n!$.

- C s'appelle la constante de Ramanujan et ne dépend que de f .
On peut utiliser cette formule quand $f(x)$ est de la forme $x^\alpha \ln^\beta(x)$ ou f est un polynôme ou une fraction rationnelle.
- Quelques propriétés à connaître sur les nombres/polynômes de Bernoulli :

- $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, ...
- Pour $n \geq 3$ impair, les B_n sont nuls.
- $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$

$$- B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

En effet, on définit $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ qui est solution de la même équation de récurrence que B_n car :

$$C'_n(x) = n C_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 C_n(x) dx = 0$$

D'où $C_n = B_n$ par unicité de la famille B_n d'où $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

Ainsi, pour $n = 2p+1$ impair on a :

$$B_{2p+1}(1-x) = -B_{2p+1}(x) \implies B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0)$$

Or :

$$B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0) \quad \text{car} \quad B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x) dx = 0$$

D'où :

$$B_{2p+1} = B_{2p+1}(0) = 0$$

Enfin, on montre par récurrence que :

$$B_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x)$$

D'où par formule de Taylor on a :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$$

4 Références

- Calcul intégral, *Candelpergher*