1 Recasages

- **241 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- **243 :** Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- **245 :** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.
- **261 :** Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- **264 :** Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- **266 :** Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

2 Résultats préliminaires

Lemme:

Soit f une fonction entière ne s'annulant pas.
Il existe alors une fonction F entière telle que $f = e^F$.

Preuve :

Soit f ne s'annulant pas sur U ouvert convexe de $\mathbb{C}$.
Posons $h = \dfrac{f'}{f}$.
U est convexe donc h admet une primitive notée g_0.
En effet, pour $z \in U$ on pose $F(z) = \displaystyle\int_{[0,z]} f(u)du$ et d'après le théorème de Goursat (qui se démontre par le théorème fondamental de Cauchy) on a :

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(u)du \implies \left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \underbrace{\sup_{u\in[z_0,z]} |f(u) - f(z_0)|}_{\underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0}$$

Et donc on a bien $F' = f$.
On a ainsi :

$$\left(fe^{-g_0}\right)' = f'e^{-g_0} - \underbrace{g_0'f}_{=hf=f'}\, e^{-g_0} = 0$$

Donc fe^{-g_0} est constante non nulle donc il existe g entière telle que $f = e^g$.
D'où le résultat.

3 Développement

Théorème:

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X + Y = Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
X et Y suivent également une loi de Poisson.

Preuve :

Soient G_X, G_Y les fonctions génératrices respectivement de X et de Y.
X et Y sont indépendantes et $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc pour tout $s \in \mathbb{D}(0,1)$:

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} \tag{1}$$

- Etape 1 :
  On veut étendre cette égalité à $\mathbb{C}$ tout entier.
  Soit $s \in \mathbb{D}(0,1)$, par définition, on a :

  $$G_X(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X=n)s^n \quad \text{et} \quad G_Y(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y=n)s^n$$

  D'après (1) on a :

  $$\left(\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X=n)s^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y=n)s^n\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n \tag{2}$$

  Et donc par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

  $$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=n-k)\mathbb{P}(Y=k)\right)s^n = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n \tag{3}$$

  Par unicité de la décomposition en série entière on a :

  $$\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\lambda} > 0 \implies \mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(Y=0) > 0 \tag{4}$$

  Et pour tout $n \geq 1$:

  $$\begin{aligned}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} &= \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=0) + \cdots + \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=n) \\ &\geq \max(\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=0), \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=n))\end{aligned} \tag{5}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(X=n) &\leq \frac{1}{\mathbb{P}(Y=0)} \max(\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=0), \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=n)) \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P}(Y=0)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \end{aligned} \tag{6}$$

Or $\frac{1}{\mathbb{P}(Y=0)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infini (par critère de d'Alembert par exemple).
La série de terme général $\mathbb{P}(X=n)$ a donc également un rayon de convergence infini.
C'est-à-dire que G_X est entière.
De même pour G_Y.

- Etape 2 :
  Soit $s \in \mathbb{C}$, notons $r = |z|$.
  Par inégalité triangulaire dans les sommes partielles et passage à la limite on a :

$$|G_X(s)| \leq G_X(r) \tag{7}$$

On a :

$$0 < \mathbb{P}(Y=0) \leq G_Y(r)$$

Car on somme des réels positifs. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y=0) G_X(r) \leq G_X(r) G_Y(r) = e^{\lambda(r-1)} \tag{8}$$

Le raisonnement suivant étant identique pour X et pour Y on se contentera de la montrer pour X.
Avec (7) et (8) on a qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$|G_X(s)| \leq C e^{\lambda |s|} \tag{9}$$

Or G_X est entière et ne s'annule par sur $\mathbb{C}$ donc il existe f entière telle que

$$G_X = e^f$$

On a alors que (9) devient :

$$|G_X(s)| = e^{\Re(f(s))} \leq C e^{\lambda |s|}$$

D'où :

$$\Re(f(s)) \leq \ln C + \lambda |s| \tag{10}$$

Or f est entière donc analytique donc on peut l'écrire sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Avec :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt \quad \text{et} \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{int} dt$$

On additionne la première expression avec le conjugué de la deuxième et on a :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it})) e^{-int} dt$$

D'où :

$$\begin{aligned} |a_n| \cdot |r^n| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Re(f(re^{it}))\right| e^{-int} dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln C + \lambda r dt \quad \text{d'après (10)} \\ &\leq 2 \ln C + 2\lambda r \end{aligned} \tag{11}$$

On a donc :

$$|a_n| \leq \frac{2 \ln C}{r^n} + \frac{2\lambda}{r^{n-1}} \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2$$

On a donc que pour tout $n \geq 2,\ a_n = 0$ et donc :

$$f(s) = \alpha s + \beta \implies G_X(s) = e^{\alpha s + \beta}$$

Or $G_X(1) = 1 = e^{\alpha} e^{\beta}$, quitte à changer α en $\alpha + 2ik\pi$ on prend $\alpha = -\beta$.
On a donc :

$$G_X(s) = e^{\alpha(s-1)}$$

Il reste à vérifier que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ car on reconnaîtra alors la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre α.
On a :

$$G'_X(s) = \alpha e^{\alpha(s-1)}$$

Donc :

$$G'_X(1) = \alpha = \mathbb{E}(X) \geq 0$$

Car X est une variable aléatoire réelle positive donc son espérance est un réel positif.
On a donc :

$$G_X(s) = e^{\alpha(s-1)} \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0$$

D'où $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, on effectue le même raisonnement pour Y.
D'où le résultat.

4 Compléments

- Soient deux séries de terme général (a_n) et (b_n), si pour tout $n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq |b_n|$ alors $R_b \leq R_a$.
  En effet, pour tout $|z| < R_b$, on a $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument par majoration, donc $|z| \leq R_a$. Donc $R_a \geq R_b$.

- Toute fonction holomorphe est analytique.
  La fonction $f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{u-z} du$ est analytique car pour tout $z \in \mathbb{D}(a, r)$:

$$\frac{1}{u-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}$$

  D'où :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n \quad \text{avec} \quad c_n(a) = \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{(u-a)^{n+1}} du$$

  Or, pour une fonction holomorphe dans U et pour $a \in U$, d'après le théorème de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(u)}{u-z} du$$

  Et donc f est bien analytique d'après ce qu'on vient de démontrer.

5 Références

- Analyse complexe, *Queffelec*