1 Recasages

- **262 :** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- **264 :** Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

2 Développement

Lemme:

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a alors :

$$\forall A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Preuve :

Soit $A \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}((X \in A) \cap (X \neq Y)) + \mathbb{P}((X \in A) \cap (X = Y)) \\ &\leq \mathbb{P}(X \neq Y) + \mathbb{P}(Y \in A) \end{aligned} \tag{1}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \tag{2}$$

On fait de même avec Y pour trouver :

$$\mathbb{P}(Y \in A) - \mathbb{P}(X \in A) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \tag{3}$$

En combinant (2) et (3) on obtient donc :

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Théorème:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 < 2\lambda < n$.
Si $X \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n}$$

Preuve :

Notons $p = \dfrac{\lambda}{n}$ et on définit la loi m_p sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ par :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = e^{-p} - p(1 - e^{-p}) \\ &\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p(1 - e^{-p}) \\ &\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0 \\ &\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = pe^{-p} \end{aligned} \tag{4}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k, Y = 0) &= \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ \mathbb{P}(X = k, Y = 1) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = 0) + \mathbb{P}(X = k, Y = 1) &= e^{-p} - p(1 - e^{-p}) + p(1 - e^{-p}) \\ &\quad + pe^{-p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^k e^{-p}}{k!} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

La loi m_p est donc bien définie.
De plus, si $(X, Y) \sim m_p$ alors $X \sim \mathcal{P}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, n couple de variables aléatoires indépendants identiquements distribués suivant la loi m_p.
On a alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(\lambda)$$

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

Soit :

$$A = \{k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| &= \sum_{k\in A} |\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A} |\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \\
&= \mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)-\mathbb{P}(X\in\mathbb{N}\setminus A)+\mathbb{P}(Y\in\mathbb{N}\setminus A) \\
\text{d'après le lemme} \quad &\leq 2\mathbb{P}(X\neq Y) \\
&\leq 2\mathbb{P}(\exists i\in\{1,\dots,n\}, X_i\neq Y_i) \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i\neq Y_i) \\
&\leq 2n-2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i=X_i) \\
&\leq 2n-2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i=Y_i=0)+\mathbb{P}(X_i=Y_i=1) \\
&\leq 2n-2\sum_{i=1}^{n} e^{-p}-p(1-e^{-p})+pe^{-p} \\
&\leq 2n-2n[e^{-p}-p+2pe^{-p}] \\
&\leq 2n-2n[e^{-p}(1+2p)-p] \\
\text{car } e^{-p}\geq 1-p \quad &\leq 2n-2n[(1-p)(1+2p)-p] \\
&\leq 2n[1-1-2p+p+2p^2+p] \\
&\leq 4np^2 \\
&\leq \frac{4\lambda^2}{n}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3 Compléments

- On a bien que si $(X,Y)\sim m_p$ alors $X\sim\mathcal{P}(p)$ et $Y\sim\mathcal{B}(1,p)$.

En effet :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= e^{-p}-p(1-e^{-p})+p(1-e^{-p}) = e^{-p} = \frac{e^{-p}p^0}{0!} \\
\mathbb{P}(X=1) &= 0+pe^{-p} = \frac{e^{-p}p^1}{1!} \\
\mathbb{P}(X=k) &= \frac{e^{-p}p^k}{k!}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

On a donc bien $X\sim\mathcal{P}(p)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= e^{-p}-p(1-e^{-p})+\sum_{n\geq 2}\frac{e^{-p}p^k}{k!} \\
&= e^{-p}-p(1-e^{-p})+1-pe^{-p}-e^{-p} \\
&= 1-p
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1) &= p(1-e^{-p})+pe^{-p} \\
&= p
\end{aligned}
$$

On a donc bien $Y\sim\mathcal{B}(1,p)$.

- On a bien :

$$X = X_1+\cdots+X_n \sim \mathcal{P}(np)=\mathcal{P}(\lambda)$$
$$Y = Y_1+\cdots+Y_n \sim \mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$$

En considérant par exemple les fonctions génératrices par récurrence et par indépendance.

4 Références

- De l'intégration aux probabilités, *Garet*, *Kurtzmann*