1 Recasages

- **209 :** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.
- **213 :** Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- **234 :** Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- **244 :** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- **250 :** Transformation de Fourier. Applications.

2 Résultats préliminaires

Propriété:

L'espace
$$L_w^2 = \{f \text{ mesurable}, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x)dx < +\infty\}$$
muni du produit scalaire :
$$\langle f, g\rangle_w = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$
est un espace de Hilbert.

Preuve :

Il s'agit de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ est bien un produit scalaire et que L_w^2 est complet. Le premier point est élémentaire par respect de la définition d'un produit scalaire et le deuxième point découle immédiatemment du théorème de Riesz-Fischer.

Propriété:

Soit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n\left(e^{-x^2}\right)$, avec D l'opérateur de dérivation, le n-ième polynôme de Hermite. On a pour tout entier n :
$$H_{n+1} = (2x - D)H_n \quad \text{et} \quad DH_n = 2nH_{n+1}$$

Preuve :

On montre tout d'abord la première expression, on dérive H_n et on a :
$$\begin{aligned} DH_n &= (-1)^n \times 2xe^{x^2} D^n\left(e^{-x^2}\right) - (-1)^{n+1} e^{x^2} D^{n+1}\left(e^{x^2}\right) \\ &= 2xH_n - H_{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

Et donc :
$$H_{n+1} = (2x - D)H_n$$

Par ailleurs, par la formule de Leibniz on a :
$$\begin{aligned} D^{n+1}\left(e^{-x^2}\right) &= D^n\left(-2xe^{-x^2}\right) \\ &= -2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(x) D^{n-k}\left(e^{-x^2}\right) \\ &= -2xD^n\left(e^{-x^2}\right) - 2nD^{n-1}\left(e^{-x^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

En multipliant (2) par $(-1)^n e^{x^2}$ on a :
$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

On obtient donc bien :
$$DH_n = 2nH_{n-1}$$

3 Développement

Théorème:

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et totale de L_w^2.

Preuve :

- On montre que cette famille est orthogonale.

Soit $m \leq n$ deux entiers, on a :

$$\begin{aligned}
\langle H_m, H_n\rangle_w &= \int_{\mathbb{R}} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) D^n\left(e^{-x^2}\right)dx \\
&= \cancel{\left[(-1)^n H_m(x) D^{n-1}\left(e^{-x^2}\right)\right]_{\mathbb{R}}} \\
&\quad + (-1)^{n+1}\int_{\mathbb{R}} (-1)^n H_m'(x) D^{n-1}\left(e^{-x^2}\right)dx \\
\text{IPP successives} &= \dots \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_m^{(n)}(x)e^{-x^2}dx
\end{aligned} \tag{3}$$

Les intégrations par parties successives sont licites car nous travaillons avec des polynômes donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ et les intégrales sont bien convergentes grâce au poids $w(x) = e^{-x^2}$.
Par ailleurs, les termes entre crochet $[\cdots]_{\mathbb{R}}$ sont de la forme $P_n(x)e^{-x^2}$ et donc convergent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.

- Si $m < n$, alors on a :

$$\deg H_m = m \implies H_m^{(n)} = 0 \implies \langle H_m, H_n\rangle_w = 0$$

- Si $m = n$, alors on a :

$$H_n = (2x - D)H_{n-1} = (2x-D)^2 H_{n-2} = \dots$$

  C'est-à-dire que le coefficient dominant de H_n est $(2x)^n$ et donc $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$.
  D'où :

$$\langle H_n, H_n\rangle_w = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

On a donc bien que la famille est orthogonale (qu'il est d'ailleurs facile d'orthonormaliser d'après ce qu'on vient de montrer).

- Pour montrer que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, on montre que $(H_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$.
  Soit $f \in (H_n, n \in \mathbb{N})^\perp$ telle que $\langle f, H_n\rangle_w = 0$, montrons que $f = 0$.

La famille $(H_n, n \in \mathbb{N})$ est échelonnée en degrés donc forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a ainsi $\langle f, P\rangle_w = 0$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{-x^2}f(x)\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}x^n\right)e^{-x^2}dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-x^2}dx}_{=\langle f, x^n\rangle_w = \langle f, P\rangle_w = 0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Par injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ on a donc que $f = 0$. D'où le résultat.

Le calcul précédent fait intervenir une interversion des symboles $\sum / \int$, justifons ce passage.
On veut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, les premières hypothèses étant directement vérifiées, il reste simplement à montrer la convergence suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-i\xi)^n}{n!}f(x)x^n e^{-x^2}\right|dx &= \int_{\mathbb{R}}|f(x)|e^{|\xi x|}e^{-x^2}dx \\
\text{Par Cauchy-Schwarz} \quad &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2 e^{-x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{2|\xi x|}e^{-x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< +\infty
\end{aligned} \tag{5}$$

D'où l'interversion des symboles.

Théorème:

Soit $h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$:

- $(-D^2 + x^2)h_n = (2n+1)h_n$
- $\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n\sqrt{2\pi}h_n$

C'est-à-dire que h_n diagonalise l'opérateur harmonique et la transformation de Fourier de $L^1 \cap L^2$ dans L^2.

Preuve :

- On a :

$$Dh_n = D\left(e^{-\frac{x^2}{2}}H_n\right) = -xh_n + \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}DH_n}_{=2nh_{n-1}} \implies (x+D)h_n = 2nh_{n-1} \tag{6}$$

et :

$$\begin{aligned} H_{n+1} = (2x-D)H_n \implies h_{n+1} &= 2xh_n - e^{-\frac{x^2}{2}}DH_n \\ &= 2xh_n - (x+D)h_n \\ &= (x-D)h_n \end{aligned} \tag{7}$$

En combinant (6) et (7) on a :

$$h_n = (x-D)h_{n-1} = \frac{1}{2n}(x-D)(x+D)h_n \implies (-D^2+x^2)h_n = (2n+1)h_n$$

- On démontre ce résultat par récurrence sur n.
  - Si $n=0$, on a :

$$\mathcal{F}(h_0)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}dx = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi}h_0$$

  - On suppose le résultat vrai au rang n et on le montre au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} \widehat{h_{n+1}} &= \widehat{xh_n} - \widehat{Dh_n} \\ &= (-i)(x-D)\widehat{h_n} \\ \text{H.d.r} \quad &= (-i)\sqrt{2\pi}(-i)^n(x-D)h_n \\ &= \sqrt{2\pi}(-i)^{n+1}h_{n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

D'où la récurrence.

4 Compléments

- Savoir calculer l'intégrale d'une gaussienne.
- Savoir démontrer que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne (par exemple par théorème de dérivation sous l'intégrale puis en explicitant un problème de Cauchy d'ordre 1).
- Savoir démontrer les propriétés élémentaires de dérivation d'une transformée de Fourier et de transformée de Fourier d'une dérivée.
- Les $(h_n)_{n\mathbb{N}}$ forment une base de $L^2(\mathbb{R})$ car "diagonalise" $\mathcal{F}$. De manière générale:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} L^2_w & \to & L^2 \\ f & \mapsto & \sqrt{w}f \end{array} \right. \quad \text{est une isométrie bijective.}$$

C'est-à-dire que pour une famille (P_n) de polynômes orthogonaux formant une base de L^2_w, alors $(\sqrt{w}P_n)$ est une base de L^2.

- Savoir montrer l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.
Soit $f \in L^1$ telle que $\widehat{f} = 0$, montrons que $f = 0$.
Soit $s > 0$, on définit :

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{x^2}{2s}} \quad \text{et} \quad g_s(x) = e^{iax}\gamma_s(x)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g_s}(u)du &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{\gamma_s}(u-a)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{\gamma_s}(a-u)du \\ &= (f * \widehat{\gamma_s})(a) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}(f * \gamma_{\frac{1}{s}})(a) \end{aligned} \tag{9}$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g_s}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\widehat{f}(u)}_{=0} g_s(u)du = 0$$

De plus, $\gamma_{\frac{1}{s}}$ est une approximation de l'unité donc :

$$\lim_{s\to 0} \|f * \gamma_{\frac{1}{s}} - f\|_1 = \left\{ \begin{array}{cc} = & \|f\|_1 \\ = & 0 \end{array} \right. \implies \|f\|_1 = 0 \implies f = 0$$

5 Références

- Analyse de Fourier, *El Amrani*
- Analyse hilbertienne, *Schwarz*