1 Recasages

- **208 :** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- **209 :** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.
- **236 :** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- **239 :** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème:

Soient :

$$f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } I(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} du \end{array} \right.$$

- $I(f)$ est définie et continue en 0.
- $\forall x \in [0,1], \forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ I(I(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$

Preuve :

- On a :
  - Pour tout $x \in [0,1],\ u \mapsto \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$ est continue sur $[0,1[$.
  - Pour tout $x \in [0,1],\ u \in [0,1[,\ \left|\frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\right| \leq \frac{||f||_\infty}{\sqrt{1-u}}$ (car f est continue sur un segment donc bornée) qui est continue et intégrable sur $[0,1[$.

  On a donc que $I(f)$ est définie et continue sur $[0,1]$ par théorème de continuité sous l'intégrale.

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$|I(f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{||f||_\infty}{\sqrt{1-u}} du = K||f||_\infty$$

D'où :

$$||I(f)||_\infty \leq K||f||_\infty$$

Donc I est continue pour la norme $||\cdot||_\infty$.
$I \circ I$ est donc également continue et est linéaire.

Par ailleurs, l'opérateur de primitivation :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \end{array} \right.$$

est également linéaire et continue pour la norme $||\cdot||_\infty$.

On veut montrer que $I \circ I = F$.
Pour cela, il suffit de raisonner par densité de l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (d'après le théorème de Stone-Weierstrass).
Par ailleurs, par linéarité de $I \circ I$ et de F, il suffit de montrer que ces applications coïncident sur l'ensemble des fonctions monomiales sur $[0,1]$, qui forment une base de l'espace des fonctions polynômiales sur $[0,1]$.

Soient $k \in \mathbb{N},\ P \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in [0,1],\ P(x) = x^k$.
On a alors :

$$\begin{aligned} I(P)(x) &= \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{P(ux)}{\sqrt{1-u}} du \\ &= \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{(ux)^k}{\sqrt{1-u}} du \\ &= \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^1 \frac{u^k}{\sqrt{1-u}} du}_{=b_k} \\ &= \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} b_k \end{aligned} \tag{1}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
I(I(P))(x) &= \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{I(P)(ux)}{\sqrt{1-u}}du \\
&= \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}b_k(ux)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-u}}du \\
&= \frac{1}{\pi}b_k x^{k+1}\underbrace{\int_0^1 \frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-u}}du}_{=c_k} \\
&= \frac{1}{\pi}b_k c_k x^{k+1}
\end{aligned} \tag{2}$$

Or, en introduisant la fonction eulérienne :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

On a :

$$\begin{aligned}
b_k c_k &= \left(\int_0^1 u^k(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\right)\left(\int_0^1 u^{k+\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\right) \\
&= B\left(k+1,\frac{1}{2}\right)B\left(k+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+2)} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{k+1} \\
&= \frac{\pi}{k+1}
\end{aligned} \tag{3}$$

On a donc, en combinant (2) et (3) :

$$I(I(P))(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k dt = F(P)(x)$$

D'après les arguments de linéarité et de densité cités précédemment on a bien que $I \circ I = F$.
D'où le résultat.

3 Compléments

- Savoir démontrer le théorème de Weierstrass.
  Considérer les polynômes de Bernstein associés à une fonction f :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

  Et montrer qu'on a $\lim_{n\to+\infty} ||B_n(f)-f||_\infty = 0$.
  On utilise la définition de la convergence uniforme et on découpe l'intervalle en deux.

- On a :

  $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

  En effet :

  $$\begin{aligned}
  \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \\
  &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \\
  &= \sqrt{\pi}
  \end{aligned} \tag{4}$$

  Il faut donc savoir démontrer la valeur de l'intégrale d'une gaussienne. Une méthode est de calculer l'intégrale double :

  $$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

  en effectuant le changement de variable :

  $$x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta)$$

- On a bien :

  $$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

  En effet :

  $$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}u^{\beta-1}e^{-(t+u)}dtdu \tag{5}$$

  On pose :

  $$x = t+u \ \text{ et } \ y = \frac{t}{t+u} \implies t = xy \ \text{ et } \ u = x(1-y)$$

On a donc :

$$|\text{Jac}| = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 x x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} x^{\beta-1}(1-y)^{\beta-1} e^{-x} dx dy \\ &= \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx\right)\left(\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy\right) \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)\end{aligned} \tag{6}$$

4 Références

- 131 développements pour l'oral, *Lesesvre*