1 Recasages

- **224 :** Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

2 Développement

Théorème:

Soit $b > 0$ et $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ une application croissante et continue telle que :

- $f(0) = 0$
- $\forall x \in]0, b],\ f(x) < x$
- $\exists \lambda > 0, r > 1$ tels que
$$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$$

On a alors que pour tout $c \in]0, b[$, la relation $u_0 = c,\ u_{n+1} = f(u_n)$ définie une suite à valeurs dans $]0, b[$ de limite nulle et :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\lambda(r-1)n)^{\frac{1}{r-1}}}$$

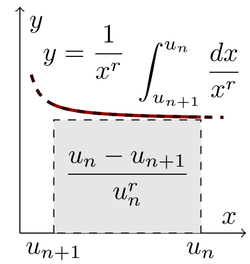
Preuve :

Il y a trois points à montrer.

- On a que f est croissante et nulle en 0.
  Supposons qu'il existe $y \in]0, b[$ telle que $f(y) = 0$, on a alors que f est nulle sur $[0, y]$ ce qui contredit l'hypothèse du développement analytique.
  On a donc que pour tout $x \in]0, b[, 0 < f(x) < x < b$ donc $]0, b[$ est stable par f donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $]0, b[$.

- On a :
$$\forall x \in]0, b[,\ f(x) < x \implies \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$$
  C'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée par 0 car définie sur $]0, b[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.
  Par continuité de f, la limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f.
  Or l'unique point fixe de f est 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- On a :



D'après l'hypothèse du développement asymptotique on a :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$$

Or la figure suggère que :

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dx}{x^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-r}(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r})$$

On vérifie cette intuition par le calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-r}(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}) &= \frac{1}{1-r}\left[u_n^{1-r} - (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r}\right] \\
&= \frac{1}{1-r}\left[u_n^{1-r}\left(1 - \left(1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)^{1-r}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-r}\left[u_n^{1-r}\left(\lambda(1-r)u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)\right] \\
&= \lambda + o(1)
\end{aligned} \tag{1}$$

On a donc :

$$\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$$

Or $\sum_n \lambda$ diverge donc on a l'équivalence des sommes partielles.
D'où :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{1-r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \\
\implies &\frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{1-r} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\lambda \\
\implies &u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\left((r-1)n\lambda\right)^{\frac{1}{1-r}}
\end{aligned} \tag{2}$$

D'où le résultat

Application:

Soit $f(x) = \ln(1+x)$, on a :

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Preuve :

f vérifie bien les hypothèses du théorème précédent, en effet :

- f est croissante et continue sur $[0, b]$.
- $f(0) = \ln 1 = 0$
- $\forall x \in]0, b], \ f(x) = \ln(1+x) < x$ par stricte concavité de ln.
- $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ c'est-à-dire que $\lambda = \frac{1}{2}$ et $r = 2$.

D'après le théorème précédent on a donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left((2-1)\cdot\frac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{1-2}} = \frac{2}{n}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)\right)^{-1} - u_n^{-1} \\ &= u_n^{-1}\left[\left(1 - \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^{-1} - 1\right] \\ &= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^2}{4} + o(u_n^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o(u_n) \end{aligned} \tag{3}$$

On a donc :

$$x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{12} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$$

Or $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge donc on a l'équivalence des sommes partielles d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{6}$$

D'où :

$$u_n^{-1} - u_1^{-1} = \frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))$$

Et donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

D'où le résultat.

3 Références

- Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, *Bernis*