1 Recasages

- **218 :** Formules de Taylor. Exemples et applications
- **243 :** Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème de Bernstein :

Soient $a > 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ telle que pour tout entier k, pour tout $x \in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$.
f est développable en série entière.

Preuve :

Il suffit de montrer que pour tout $b \in [0,a[$, f est développable en série entière sur $]-b,b[$.

- Etape 1:
Soit $x \in [0,b[$, posons $F(x) = f(x) + f(-x)$.
F est paire donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(2k+1)}(0) = 0$.
D'après la formule de Taylor avec reste intégral on a :

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0) + R_n(x)$$

Où :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt$$

Par ailleurs, on a que $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$ par hypothèse de l'énoncé. On a donc :

$$\forall x \in [0,b[, 0 \leq R_n(x) < F(x) \implies 0 \leq R_n(b) \leq F(b)$$

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

La fonction $t :\mapsto \frac{x-t}{b-t}$ est décroissante sur $[0,x]$ (par argument élémentaire de dérivation par exemple) d'où :

$$\left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} < 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \underbrace{\int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt}_{=R_n(b)} \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1}F(b)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned} \tag{1}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0,b[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$$

F étant paire, le résultat est vrai sur $]-b,b[$.

- Etape 2 :
On s'intéresse cette fois directement à f.
Soit $x \in]-b,b[$, on a :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0) + r_n(x)$$

Où :

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+2)}(t)dt$$

On a, pour tout $t \in [0,x]$:

$$0 \leq f^{(2n+2)}(t) \leq f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) = F^{(2n+2)}(t)$$

D'où d'après l'étape 1, par critère de majoration:

$$|r_n(x)| \leq R_n(|x|) \implies \lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, notons :

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$$

D'après les résultats obtenus précédemment on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$$

Or :

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$$

C'est la terme général d'une série convergente d'après l'étape 1 donc converge vers 0.
D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} S_{2n}(x) = f(x)$$

On conclut donc que $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$ et donc :

$$\forall x \in]-b, b[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

On a donc bien le résultat.

Application :

tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en 0.

Preuve :

Posons $f = \tan' = 1 + \tan^2$.
On a que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par la formule de Leibniz on a :

$$f^{(n)} = \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

Par récurrence forte, on a que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)}$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
La fonction tan étant impaire, on a que pour tout $k \in \mathbb{N},\ f^{(2k)} = \tan^{(2k+1)}$ sont paires sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc positives.
D'après le théorème de Bernstein on a que $f = \tan'$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en 0.
La fonction tan l'est donc également.

3 Références

- Analyse, *Gourdon*