1 Recasages

- **229 :** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- **246 :** Séries de Fourier. Exemples et applications.
- **253 :** Utilisation de la notion de convexité en analyse.

2 Développement

Lemme : *(Leçons 229 et 253)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

- Si g existe et est positif pour tout réel x, alors f est convexe.
- Si g est nulle, alors f est affine.

Preuve :

- Soit $\alpha > 0$, on définit la fonction :

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + \alpha x^2 \end{array} \right.$$

On a $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} f_\alpha = f$, pour montrer que f est convexe, montrons que f_α est convexe.

On a alors que pour tout $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + 2\alpha$$

Or on a :

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in]0, \varepsilon[, \frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} > 0$$

D'où :

$$f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2} \left[f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) \right]$$

Montrons que f_α est convexe.
On pose :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_\alpha(x) + \mu x \end{array} \right.$$

On montre que φ atteint son maximum sur $[a,b]$ en a ou en b.
φ est continue sur un compact donc est bornée et atteint ses bornes.
Notons :

$$M = \sup_{[a,b]} \varphi\ ,\ \Gamma = \varphi^{-1}(\{M\}) \text{ et } c = \inf \Gamma$$

φ est continue donc Γ est fermé donc on a que $c \in \Gamma$ et donc que $\varphi(c) = M$.

Si $a < c < b$, alors il existe $h > 0$ tel que :

$$a < c - h < c < c + h < b \text{ et } \varphi(c) \leq \frac{1}{2} \left[\varphi(c+h) + \varphi(c-h) \right]$$

Or :

$$\varphi(c) = M \implies \varphi(c-h) = \varphi(c) = \varphi(c+h) = M$$

Ce qui contredit la définition de c.
On a donc $c = a$ ou $c = b$.
φ atteint donc son maximum en a ou en b, donc f_α est convexe, donc f également.
D'où le résultat.

- f vérifie les hypothèses du point précédent donc est convexe. Ceci est aussi valable pour $-f$ donc f est concave.
Donc f est affine.

Lemme : *(Leçon 246)*

Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes, convergente de somme nulle.
On pose :

$$U_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1 \end{array} \right. \text{ et } U_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left(\frac{\sin(nt)}{nt} \right)^2 \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(t) \text{ existe et } \lim_{t \to 0} S(t) = 0$$

Preuve :

- On a que $\sum a_n$ converge signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $|a_n U_n(t)| \leq \frac{|a_n|}{n^2t^2}$ donc $S(t)$ existe pour $t \neq 0$.
- On pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, par transformation d'Abel on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n U_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n[U_n(t) - U_{n+1}(t)] + s_N U_N(t)$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} s_N U_N(t) = 0$, d'où :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n[U_n(t) - U_{n+1}(t)]$$

On a que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |s_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad A = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |s_n|$$

D'où, pour $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|S(t)| \leq A \sum_{n=0}^{N} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} |U_n(t) - U_{n+1}(t)|$$

  - On a d'une part :

$$\begin{aligned} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| &= \left| \int_{nt}^{(n+1)t} f(x)dx \right| \\ &\leq \int_{nt}^{(n+1)t} |f(x)|dx \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{1}$$

    Or, par un calcul on montre que $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

    Donc $M = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ existe.

  - D'une autre part, on a :

$$\lim_{t\to0} U_n(t) = 1 \implies \lim_{t\to0} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| = 0$$

    C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R}^*, |t| < \eta \implies |U_n(t) - U_{n+1}(t)| < \varepsilon'$$

On a donc, pour $\varepsilon' > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|t| < \eta$ on a :

$$\begin{aligned} |S(t)| &\leq A \sum_{n=0}^{N} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| \\ &\leq \underbrace{A(N-1)\varepsilon' + \varepsilon M}_{=\varepsilon''} \end{aligned} \tag{2}$$

On a donc bien que $\lim\limits_{t\to0} S(t) = 0$.

Théorème de Cantor :

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = 0$.

Alors $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

- Etape 1:
  On suppose tout d'abord que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ et on pose :

$$F : x \mapsto c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}}{(in)^2}$$

  - On a $\left|\frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}\right| \leq \frac{|c_n|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ donc on a convergence normale donc uniforme donc F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Par calcul direct on a pour tout $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\frac{nh}{2}}\right)$$

    En appliquant le deuxième lemme avec $a_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ et $t = \frac{h}{2}$ on obtient que :

$$\lim_{h\to0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0$$

    En vertu du premier lemme, on en déduit que F est une fonction affine. On a donc :

$$F(x) = \alpha x + \beta = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} \iff \beta + \alpha x - c_0 \frac{x^2}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$$

On en déduit que $x : \beta + \alpha x - c_0 \frac{x^2}{2}$ est 2π-périodique.

On a donc nécessairement $\alpha = c_0 = 0$ et $\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Cette série est donc égale à sa série de Fourier et comme c'est une constante, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{c_n}{(in)^2} = 0 \implies \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = 0$$

- Etape 2 :
  On ne suppose plus que c_n tend vers 0 en $+\infty$.
  On évalue la série $\sum c_n e^{inx}$ en $x+u$ et en $x-u$ pour $u \in \mathbb{R}$ et on somme les résultats. On obtient donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{inu} = 0$$

  En fixant x, on peut voir cette somme comme la somme d'une série trigonométrique en u de coefficients $d_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ qui converge vers 0 car $\sum c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ converge.

  On est donc ramené au cas de l'étape 1 avec :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx} = 0 \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

  On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ d_n = 0 \implies \forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = 0 \implies \forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 0$$

3 Compléments

- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
  Démonstration par caractérisation séquentielle des fermés.
- La limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.
  Démonstration directe par la définition d'une fonction convexe.
- $$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] = 2\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \times \frac{\sin(x)}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
- Toute suite convergente est bornée.
  Ceci vient du fait que :
$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l|$$
- La convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme.
  Ceci vient de fait que :
$$|S(t) - S_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_k||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ reste d'une série convergente}$$
- Toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
  Ceci vient du fait que l'image d'un compact K par une application continue f est compact donc $f(k)$ est un compact donc borné et fermé. C'est-à-dire que f est bornée et atteint ses bornes.
- La série est bien égale à sa série de Fourier et on a $\frac{c_n}{(in)^2}$:
  On a $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} = \beta$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
  On a donc :
$$\begin{aligned} c_p(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-ipx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{i(n-p)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx \\ &= \frac{c_p}{(ip)^2} \end{aligned} \tag{3}$$
  Par ailleurs on a :
$$\begin{aligned} c_p(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \beta e^{-ipx} dx \\ &= \beta\delta_{0,p} \end{aligned} \tag{4}$$
  On a donc bien que $\frac{c_p}{(ip)^2} = 0$ pour tout $p \neq 0$ et donc que $c_p = 0$.

4 Références

- Analyse, *Gourdon*