1 Recasages

- **201 :** Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- **208 :** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- **234 :** Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- **235 :** Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- **250 :** Transformation de Fourier. Applications.

2 Développement

On prend pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xt}dx$.

Théorème:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.
En particulier $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(\mathbb{R})$ est dense.

Preuve :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  On définit $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$ (qui existe bien car $f, \tilde{f} \in L^1$ donc g également).
  On a :
  $$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f}(-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+z)\overline{f}(z)dz \\ &= \langle f, f_{-x}\rangle_{L^2} \quad \text{avec } f_{-x} : y \mapsto f(x+y) \end{aligned} \tag{1}$$
  g est continue par continuité de la translation et du produit scalaire et est bornée par $\|f\|_2^2$ par inégalité de Cauchy-Schwarz.
  On a :
  $$g(0) = \|f\|_2^2 \quad \text{et} \quad \widehat{\tilde{f}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}e^{-2i\pi xt}dx = \overline{\widehat{f}(t)}$$
  D'où :
  $$\widehat{g} = |\widehat{f}|^2$$
- Soit $\lambda > 0$, on introduit les fonctions :
  $$h_\lambda : x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad \text{et} \quad H_\lambda : t \mapsto e^{-\lambda|t|}$$
  On a :
  $$\widehat{H_\lambda}(x) = h_\lambda(x)$$
  $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ est une approximation de l'unité car :
  $$\begin{aligned} h_\lambda &> 0 \\ \int_{\mathbb{R}} h_\lambda &= 1 \\ \int_{|x|\geq\eta} h_\lambda &\xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \end{aligned} \tag{2}$$
  On a par ailleurs :
  $$\begin{aligned} (g * h_\lambda)(0) &= \int_{\mathbb{R}} g(-t)h_\lambda(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(-t)\int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)e^{2i\pi xt}dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(-t)e^{2i\pi xt}dt\right) H_\lambda(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)H_\lambda(x)dx \end{aligned} \tag{3}$$
  On a donc :
  - D'une part que :
    $$g * h_\lambda(0) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} g(0)$$
    car $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ est une approximation de l'unité.
  - D'autre part que $\widehat{g}$ est positive et $H_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 1$ et est décroissante d'où par théorème de convergence monotone on a :
    $$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)H_\lambda(x)dx \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)dx = \|\widehat{f}\|_2^2$$

  On a donc que :
  $$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad \text{et} \quad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$$
- Pour montrer que $Y = \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on montre que $Y^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in Y^\perp$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a :

$$0 = \langle h_\lambda(\alpha - \cdot), f \rangle_{L^2} = h_\lambda * \overline{f}(\alpha)$$

Or :

$$\|h_\lambda * \overline{f} - \overline{f}\|_{L^2} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$\|f\|_2 = \lim_{\lambda \to 0} \|h_\lambda * f\|_2 = 0 \implies f = 0 \implies Y^\perp = \{0\}$$

Donc Y est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème:

L'application $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Preuve :

- On a que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer et que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est continue (c'est une isométrie).
  D'après le théorème de prolongement des applications continues on a que $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en une application $\mathcal{P}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

  Il reste à montrer que $\mathcal{P}$ est une isométrie bijective.

- Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, par densité, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^\mathbb{N}$ qui converge vers f.
  C'est donc en particulier une suite Cauchy.
  Or, d'après le théorème précédent, on a que :

  $$\|f_n\|_2 = \|\widehat{f_n}\|_2$$

  Donc $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite Cauchy donc on a par continuité de $\mathcal{P}$, lorsque n tend vers $+\infty$:

  $$\|f\|_2 = \|\mathcal{P}(f)\|_2$$

  On a donc que $\mathcal{P}$ est une isométrie linéaire et donc est bien injective.

- Montrons que $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$:
  - Montrons que $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé.
    Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\mathbb{R})^\mathbb{N}$ telle que $(\mathcal{P}(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\mathbb{R})^\mathbb{N}$ converge.
    On a donc que $(\mathcal{P}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et on a $\|\mathcal{P}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc converge car $L^2(\mathbb{R})$ est complet et donc on conclut par continuité de $\mathcal{P}$ par caractérisation séquentielle des fermés.
  - Montrons que $H = \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
    Soit $g \in H^\perp$, par densité de $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on a qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^\mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathcal{P}(f_n) - g\|_2 = 0$.
    Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(f_n) \in H$ et donc $\langle \mathcal{P}(f_n), g \rangle_{L^2} = 0$ et donc par continuité du produit scalaire on a :

    $$\langle g, g \rangle_{L^2} = 0 \implies g = 0 \implies H^\perp = \{0\}$$

    Donc H est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

  $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ étant fermé et dense dans $L^2(\mathbb{R})$ on a bien l'égalité des ensembles et donc la surjectivité de $\mathcal{P}$.

D'où le résultat.

3 Compléments

- Savoir démontrer le théorème de Riesz-Fischer (avoir une idée à minima).
  Considérer une suite de Cauchy et construire une suite extraite et puis utiliser du lemme de Fatou et la complétude de $\mathbb{R}$.

- Si (h_n) est une approximation de l'unité et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $h_n * g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$.
  En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ on a $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ donc est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème de Heine).
  Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout réel t :

  $$|t| = |(x-t) - x| \leq \delta \implies |g(x-t) - g(x)| \leq \varepsilon$$

  On a

  $$\int_{|t|>\delta} h_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

  $$\int_{|t|>\delta} h_n(t)dt < \varepsilon$$

On a :

$$\begin{aligned}
|h_n * g(x) - g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} h_n(t)g(x-t)dt - \int_{\mathbb{R}} h_n(t)g(x)dt\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} h_n(t)\,|g(x-t)-g(t)|\,dt \\
&\leq \int_{|t|\leq\delta} h_n(t)\underbrace{|g(x-t)-g(t)|}_{\leq\varepsilon}dt \\
&\quad + \int_{|t|>\delta} h_n(t)\underbrace{|g(x-t)-g(t)|}_{\leq 2||g||_\infty}dt \qquad (4)\\
&\leq \varepsilon\underbrace{\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt}_{=1} + 2||g||_\infty\underbrace{\int_{|t|>\delta} h_n(t)dt}_{\leq\varepsilon} \\
&\leq \varepsilon(2||g||_\infty + 1) \\
&\leq \varepsilon'
\end{aligned}$$

D'où $h_n * g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

- $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
  En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a :

  $$\|f - f\mathbb{1}_{[-n,n]}\|_2^2 = \int_{|x|>n} |f(x)|^2dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad (f\mathbb{1}_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}\cap L^2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$$

  D'où le résultat.

- Soit E, F deux espaces métriques avec F qui est complet.
  Soit $A \subseteq E$ une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue.
  Il existe alors une unique application $\tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge f.
  En effet, soit $x \in E$,
  Il existe alors $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$ par densité.
  (a_n) est alors une suite de Cauchy dans A.
  f est uniformément continue donc $(f(a_n))$ est également une suite de Cauchy dans F qui est complet donc on a :

  $$f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in F$$

  Soit $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$, montrons que $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.
  Soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang on a, par uniforme continuité de f :

  $$d(f(b_n), y) \leq d(f(b_n), f(a_n)) + d(f(a_n), y) \leq 2\varepsilon$$

  On a donc bien $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.

  Soit $\tilde{f}(x) = y$ et pour tout $z \in A$, $\tilde{f}(z) = f(z)$, montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue.
  Soit $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leq \frac{\eta}{2}$ et (a_n), (b_n) telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.
  Il existe donc un certain rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel pour tout $n \geq N$ on a $d(a_n, b_n) \leq \eta$.
  D'où :

  $$d(f(a_n), f(b_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))$$

  D'où l'uniforme continuité.

4 Références

- Calcul intégral, *Faraut*