1 Recasages

- **244 :** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- **250 :** Transformation de Fourier. Applications.
- **261 :** Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- **262 :** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- **266 :** Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

2 Développement

Théorème de Lévy:

$$X_n \xrightarrow{\text{Loi}} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t) \text{ avec } \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

Preuve :

- Supposons que $X_n \xrightarrow{\text{Loi}} X$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_t : x \mapsto e^{itx}$ est continue et bornée donc on a :
  $$\mathbb{E}(f_t(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f_t(X))$$
  D'où :
  $$\phi_{x_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t)$$
- Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t)$.
  - Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que f est de calsse $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide (de même que toutes ses dérivées).
    Par bijectivité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $f = \widehat{g}$.
    D'où :
    $$\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-itX_n}dt\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(e^{-itX_n}\right)g(t)dt$$
    D'après le théorème de Fubini-Lebesgue.
    Par ailleurs on a :
    * $\mathbb{E}(e^{-itX_n}) = \phi_{X_n}(-t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(-t) = \mathbb{E}(e^{-itX})$ par hypothèse.
    * $|\mathbb{E}(e^{-itX_n})g(t)| \leq |g(t)|$ qui est intégrable car $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

    D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :
    $$\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(X))$$
  - Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On a :
    $$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$$
    Le résultat du point précédent a été vérifié pour toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il est donc vrai dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.
    Il existe donc $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
    $$\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$$
    On a alors :
    $$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &\leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(h(X_n))| + |\mathbb{E}(h(X_n)) - \mathbb{E}(h(X))| \\ &\quad + |\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(h(X))| \\ &\leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}(h(X_n)) - \mathbb{E}(h(X))| \\ &\leq 3\varepsilon \text{ d'après le premier point} \end{aligned} \tag{1}$$
    On a donc :
    $$\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(X)) \text{ où } f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$$

  On a donc que :
  $$X_n \xrightarrow{\text{Loi}} X$$

Théorème central limite:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance m et de variance σ^2.
On a alors :
$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1) \text{ avec } \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$$

Preuve :

D'après le théorème de Lévy démontré précédemment, pour montrer que :

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{\text{Loi}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_{Z_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Quitte à centrer et réduire, c'est-à-dire à remplacer X_n par $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$, on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on a :

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad \text{car identiquement distribuée}
\end{aligned} \tag{2}$$

X_1 admet un moment d'ordre 2, sa fonction caractéristique est donc de classe $\mathcal{C}^2$ et donc par formule de Taylor-Young on a :

$$\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi_{X_1}(0) + \phi'_{X_1}(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \phi''_{X_1}(0)\frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \quad , \quad \phi_{X_1}(0) = 1 \quad , \quad \phi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}(X_1) = im = 0$$
$$\text{et} \quad \phi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}(X_1^2) = -\sigma^2 = -1$$

D'où :

$$\left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On a donc bien par théorème de Lévy :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

3 Compléments

- La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bijective.
  - $\mathcal{F}$ est linéaire, soit $f \in \ker\mathcal{F}$, par formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ (car $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$) on a que $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(0) = 0$ et donc $\mathcal{F}$ est injective.

    La formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ se prouve en considérant la fonction $f_\varepsilon : t \in \mathbb{R} \mapsto \hat{f}(t)e^{2i\pi xt}e^{-\pi\varepsilon t^2}$ et en calculant sa limite quand $\varepsilon \to 0$ de deux manières différentes.
  - Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on veut montrer que f est surjective donc que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
    * D'une part, la décroissance rapide implique que pour tout entier naturel n, $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par théorème de dérivation sous l'intégrale.
    * D'autre part, pour tout couple d'entiers naturels (n,k), la fonction $[x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)]^{(k)}$ est danse $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc dans $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier tend vers en l'infini. Or, en appliquant les propriétés d'échange entre multiplication par un polynôme et dérivation on a :

    $$\begin{aligned}
    \mathcal{F}\left([x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x)]^{(k)}\right)(\xi) &= (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(x \mapsto (-2i\pi x)^n f(x))(\xi) \\
    &= (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(f)^{(n)}(\xi)
    \end{aligned} \tag{3}$$

    ce qui prouve la décroissance rapide de $\mathcal{F}(f)$ ainsi que toutes ses dérivées successives.

    On a donc :

    $$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

    On a donc en particulier que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ donc par inversion de Fourier on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

    $$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x) = f(x)$$

    Donc en posant $g(x) = \mathcal{F}(f)(-x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a bien $f = \mathcal{F}(g)$.
    D'où la surjectivité.
- On a bien $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par définition même de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.
  Ce résultat se prouve en passant par les approximations de l'unité.

Soit

$$\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{n}{c} e^{-\frac{1}{1-|nx|}} \mathbb{1}_{|nx|<1} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad c = \int_0^1 e^{-\frac{1}{1-|x|}} dx$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, posons $f_n = f * \varphi_n$.
On a que (f_n) converge uniformément vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par théorème de dérivation sous l'intégrale.
Par ailleurs les fonctions f_n sont à supports compacts car les fonctions φ_n et f le sont.
D'où le résultat.

- Lors de la preuve du théorème central limite, une suite (ε_n) est introduite et à valeurs complexes. Pour montrer le résultat suivant, on utiliserait traditionnellement les DL :

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On se rend bien compte qu'on devrait faire appel à la détermination complexe du logarithme.
Pour éviter ces complications et ces subtilités (inutiles si non maitrisées) il est possible de raisonner comme suit :

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \left(1 + \frac{2\varepsilon_n}{2n - t^2}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left|\left(1 + \frac{2\varepsilon_n}{2n-t^2}\right)^n - 1\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{2\varepsilon_n}{2n-t^2}\right)^k\right| \\ &\le \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left|\frac{2\varepsilon_n}{2n-t^2}\right|^k \\ &\le \left(1 + \left|\frac{2\varepsilon_n}{2n-t^2}\right|\right)^n - 1 \\ &\le \underbrace{e^{n \ln\left(1+\left|\frac{2\varepsilon_n}{2n-t^2}\right|\right)} - 1}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-1=0} \end{aligned} \tag{4}$$

On a donc bien le résultat en esquivant le logarithme complexe.

4 Références

- De l'intégration aux probabilités, *Garet*, *Kurtzman*
- Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, *Bernis*