1 Recasages

- **155 :** Exponentielle de matrices. Applications.
- **170 :** Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- **171 :** Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- **215 :** Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- **220 :** Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- **221 :** Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème:

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$.
Si la matrice $A = Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentie : pour tout y_0 assez voisin de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$.

Preuve :

L'idée est de d'abord s'intéresser au cas du problème linéarisé :

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= y_0 \end{cases}$$

et d'en déduire le résultat dans le cas général en se ramenant au cas linéaire.

- Etape 1 :
  La solution du problème linéarisé est donnée pour tout réel t positif par :

  $$z(t) = e^{tA}y_0$$

  Or on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\Re(\lambda) < 0$.

Alors pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$, $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$.

En effet A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc est trigonalisable donc par décomposition de Dunford on a :

$$A = D + N \ \text{ avec } \ D \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente et } DN = ND$$

N et D sont trigonalisables dans une base commune car ces deux matrices commutent. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$N = P \begin{bmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad D = P \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{=\Delta} P^{-1}$$

– On a $e^{t\Delta} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ et $||e^{t\Delta}||_\infty = \sup_i |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$ où $c = -\sup_i \Re(\lambda_i) > 0$.

  Par équivalence des normes en dimension finie on a qu'il existe $K_1 > 0$ tel que :

  $$\|e^{t\Delta}\| \leq K_1 e^{-ct}$$

– De plus, étant donné que $e^{tD} = Pe^{t\Delta}P^{-1}$, on a que pour tout $t \geq 0$:

  $$\|e^{tD}\| \leq \|P\| \cdot \|e^{t\Delta}\| \cdot \|P^{-1}\| \leq \underbrace{(\|P\| \cdot K_1 \cdot \|P^{-1}\|)}_{=K_2} e^{-ct}$$

– Enfin, N étant nilpotente, on a que $e^{tN} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k$ où m est l'indice de nilpotence de N.
  C'est-à-dire qu'on a $\|e^{tN}\| \underset{t\to+\infty}{=} o(t^m)$.
  Or $t^m \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{\frac{ct}{2}})$ et $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\|$.
  On a donc :

  $$e^{tA} = o(t^m e^{-ct}) = o(e^{-\alpha t}) \ \text{ avec } \alpha = \frac{c}{2} > 0$$

On en déduit donc que :

$$\|z(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|y_0\|$$

D'où la décroissance exponentielle vers 0 pour $t \to +\infty$.

- Etape 2 :
  On s'intéresse désormais au problème général et on pose pour tous $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$b(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}\tilde{x}, e^{tA}\tilde{y}\rangle dt$$

  - L'application b est bien définie car :

$$\begin{aligned} \langle e^{tA}\tilde{x}, e^{tA}\tilde{y}\rangle &\leq \|e^{tA}\tilde{x}\| \cdot \|e^{tA}\tilde{y}\| \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq K^2 e^{-2\alpha t}\|\tilde{x}\| \cdot \|\tilde{y}\| \quad \text{d'après l'étape 1} \end{aligned} \tag{1}$$

  - b est bien une forme bilinéaire symétrique, par ailleurs on a :

$$q(\tilde{x}) = b(\tilde{x}, \tilde{x}) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}\tilde{x}\|^2 dt$$

    est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et ne s'annule que pour $\tilde{x} = 0$.
    C'est-à-dire que q est définie-positive.

  On a donc que q est une forme quadratique. On définit alors la norme quadratique $\|\cdot\|_q$ par :

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\tilde{x}\|_q = \sqrt{q(\tilde{x})}$$

  Par équivalence des normes en dimension finie on a qu'il existe $u_q > 0$ tel que :

$$u_q\|\tilde{x}\|_q \leq \|\tilde{x}\|$$

  Soit y une solution maximale du système différentiel définie sur $]c, d[$ contenant 0.
  On montre que pour tout $t \in]c, d[$ tel $\|y(t)\|$ est suffisamment petit, il existe $\beta > 0$:

$$(q \circ y)'(t) \leq -\beta(q \circ y)(t)$$

  On définit $r(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - A\tilde{x}$ pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$.
  On a :

$$\begin{aligned} (q \circ y)' &= Dq_y \cdot y' \quad \text{Formule de différentiation des fonctions composées} \\ &= 2b(y, y') \quad \text{Différentielle d'une forme quadratique} \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \end{aligned} \tag{2}$$

  - D'une part on a :

$$\begin{aligned} 2b(y, Ay) &= \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}y, Ae^{tA}y\rangle dt \\ &= \left[\|e^{tA}\|^2\right]_0^{+\infty} \\ &= -\|y\|^2 \quad \text{car} \quad \|e^{tA}\|^2 \leq K^2 e^{-2\alpha t}\|x\|^2 \\ &\leq -u_q^2\|y\|_q^2 \end{aligned} \tag{3}$$

  - D'autre part on a que f est différentiable en 0 alors lorsque $\tilde{x}$ tend vers 0 on a :

$$f(\tilde{x}) = f(0) + Df_0 \cdot \tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|)$$

    Par équivalence des normes en dimension finie on a, lorsque $\tilde{x}$ tend vers 0 :

$$f(\tilde{x}) = f(0) + Df_0 \cdot \tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|_q)$$

    Etant donné que $f(0) = 0$ on a, lorsque $\tilde{x}$ tend vers 0 :

$$r(\tilde{x}) = Df_0 \cdot \tilde{x} - A\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|_q) = o(\|\tilde{x}\|_q)$$

    C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|\tilde{x}\|_q \leq \delta \implies \|r(\tilde{x})\|_q \leq \varepsilon\|\tilde{x}\|_q$$

    Ayant supposé que y est suffisamment petit, on a que pour $\|y\|_q < \delta$, par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|b(y, r(y))| \leq \|y\|_q \cdot \|r(y)\|_q \leq \varepsilon\|y\|_q^2 \tag{4}$$

  D'après (3) et (4), pour $\|y\|_q \leq \delta$ et en posant $\beta = u_q^2 - 2\varepsilon$, l'expression (2) devient :

$$(q \circ y)' = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \leq -u_q^2\|y\|_q^2 + 2\varepsilon\|y\|_q^2 = -\beta(q \circ y)$$

- Etape 3 :
  Par hypothèse de l'énoncé on prend y_0 suffisamment proche de 0, par exemple prenons $\|y_0\| < \delta$. On montre alors que pour tout $t \in [0, d[, \|y(t)\|_q < \delta$. On pourra alors exploiter les résultats de l'étape 2.

  On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in]0, d[$ tel que $\|y(t)\| \geq \delta$.
  On considère $t_0 = \inf\{t \in]0, d[, \|y(t)\|_q = \delta\}$ (qui existe bien grâce au théorème des valeurs intermédiaires).
  On a alors que pour tout $t < t_0$:

$$\|y(t)\|_q < \delta \quad \text{et} \quad (q \circ y)'(t) \leq -\beta(q \circ y)(t) \quad \text{d'après l'étape 2}$$

  Ainsi, par continuité de la dérivée, en faisant tendre t vers t_0 par valeurs inférieures, on a :

$$(q \circ y)'(t_0) \leq -\beta(q \circ y)(t_0) = -\beta\delta^2 < 0$$

  C'est-à-dire qu'il existe un voisinage de t_0 tel que $t \mapsto (q \circ y)(t)$ est strictement décroissante.

Soit donc $t < t_0$ dans ce voisinage (c'est-à-dire très légèrement inférieur à t_0), on a alors par stricte décroissance :

$$(q \circ y)(t) > (q \circ y)(t_0) = \delta^2$$

Or $t < t_0$ d'où :

$$(q \circ y)(t) = \|y(t)\|_q^2 < \delta^2$$

D'où l'absurdité.
On a donc que pour tout $t \in [0, d[,\ \|y(t)\|_q < \delta$

- Etape 4 :
  On conclut.
  La fonction y n'explose pas en temps fini, on a donc que la solution y est globale définie sur $\mathbb{R}^+$.
  On a donc, pour tout réel positif t :

$$\begin{aligned}
& (q \circ y)'(t) \leq -\beta (q \circ y)(t) && \text{d'après étapes 2 et 3} \\
\implies & (q \circ y)'(t) e^{\beta t} + \beta (q \circ y)(t) e^{\beta t} \leq 0 && \\
\implies & \frac{d}{dt}\left(e^{\beta t}(q \circ y)(t)\right) \leq 0 && (5) \\
\implies & e^{\beta t}(q \circ y)(t) \leq e^{\beta \cdot 0}(q \circ y)(0) && \begin{array}{c}\text{par décroissance de} \\ t \mapsto e^{\beta t}(q \circ y)(t) \ \text{ sur } \mathbb{R}^+\end{array} \\
\implies & \|y(t)\|_q \leq e^{-\frac{\beta t}{2}} \|y_0\|_q &&
\end{aligned}$$

D'où la décroissance exponentielle

3 Compléments

- L'idée générale est que si $\overline{y}$ est un point d'équilibre (dans notre démonstration on a pris $\overline{y} = 0$) on a $f(\overline{y}) = 0$ et donc en posant $\Delta(t) = y(t) - \overline{y}$ on a :

$$\Delta'(t) = y'(t) = f(\Delta(t) + \overline{y})$$

Et donc pour $\Delta(t)$ suffisamment proche de 0 on a le développement limité en $\overline{y}$:

$$\Delta'(t) = \cancel{f(\overline{y})} + Df_{\overline{y}} \cdot \Delta(t) + o(\|\Delta(t)\|)$$

Et donc :

$$\Delta'_{\lim} = Df_{\overline{y}} \cdot \Delta_{\lim}$$

On peut donc étudier l'équation $y' = Df_{\overline{y}} \cdot y$ pour avoir une idée de l'étude de $y' = f(y)$.

4 Références

- Petit guide de calcul différentiel, *Rouvière*