Sujet 1

Cours :

Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice 1 :

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit $a > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2 :

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

Exercice 3 :

Soit (a_k) une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\cos(a_k t)}{t} dt$.

Exercice 4 :

Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan(t))}{t^\alpha} dt, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. Démontrer que $f \geq 0$.
2. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Justifier que $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que $x f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Sujet 2

Cours :

Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 1 :

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Etudier la monotonie de la suite (I_n) puis montrer que (I_n) converge vers une limite à démontrer.
3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n I_n$.

Exercice 2 :

Etudier l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 :

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Exercice 4 :

Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt$ en fonction de la constante d'Euler γ.

Exercice 5 :

Soit a un réel et f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a, +\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.
2. Montrer que si f est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en $+\infty$.

Sujet 3

Cours :

Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1 :

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 :

L'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ est-elle intégrable sur $[0, 1[$?

Exercice 3 :

Soit f une application continue et positive de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $I_{n-1}^2 \leq I_n I_{n-2}$.

Exercice 4 :

Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2 + \sin(t) + \cos(t)}$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} f''^2$ convergent. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'^2$ converge.