Sujet 1

Cours :
Donner la définition d'une norme sur un espace vectoriel. Donner un exemple de norme sur $\mathbb{R}^n$ puis sur $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 1 :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2 :
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2(t)} dt$.

Exercice 3 :
On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}} dx$$

Effectuer un changement de variable et obtenir un équivalent de I_n.

Exercice 4 :
On pose

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1} dt$$

Montrer que pour tout x réel positif, $I(x) \geq 0$.

Sujet 2

Cours :
Démontrer que les boules sont des ensembles convexes.

Exercice 1 :
Pour $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. Etudier la monotonie de la suite (I_n) puis montrer que (I_n) converge vers une limite à démontrer.

3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n I_n$.

Exercice 2 :
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx$.

Exercice 3 :
On considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$$

Déterminer sa limite en $+\infty$ puis un équivalent.

Exercice 4 :
On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

Déterminer une relation de récurrence pour cette suite. En déduire une valeur de A et de a telles que :

$$I_n \sim \frac{A}{n^a}$$

Sujet 3

Cours :
Démontrer que pour toute partie A d'un espace vectoriel normé E, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 1 :
Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, +\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.
   (b) Prouver que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 2 :

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_0^1 \frac{x f(t) dt}{x^2+t^2}$.

Exercice 3 :
Donner un développement asymptotique à deux termes de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx$$

Exercice 5 :

Prouver l'intégrabilité de $I = \int_0^1 \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) dt$ puis exprimer sa valeur en fonction de la constante d'Euler γ.

Exercice 5 :

Donner un équivalent de $\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4 :

Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$$

Exercice 5 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue.
Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 e^{x(t-1)n} f(t)dt$$