# Sujet 1

**Cours :**
Enoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$.

**Exercice 1 :**

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Dans le cas $\alpha \leq 0$, à l'aide d'une minoration très simple de $u_n$, démontrer que la série diverge.
   (b) Dans le cas $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.
2. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$$

**Exercice 2 :**

1. Soit $(x_n)$ une suite de réels et soit $(y_n)$ définie par

$$y_n = x_{n+1} - x_n$$

   Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite $(x_n)$ sont de même nature.
2. On pose $(u_n)$ la suite définie par

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

   Donner la nature de la série de terme général

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$$

# Sujet 2

**Cours :**
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.

**Exercice 1 :**

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ de même nature.}$$

2. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1}$$

**Exercice 2 :**
On pose $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   Etudier la nature de la série $\sum_n v_n$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
   On notera $\gamma$ sa limite.
3. Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
   Donner un équivalent de $R_n$.
4. Soit $w_n$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$ et $t_n = w_{n+1} - w_n$.
   Donner un équivalent du reste $\displaystyle\sum_{n\geq k} t_k$.
   En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

# Sujet 3

**Cours :**
Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

**Exercice 1 :**
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que :

$$\forall A, B \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$$

   .
   Puis, démontrer que :

$$\forall p \geq 1,\ \|A^p\| \leq n^{p-1}\|A\|^p$$

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

**Exercice 2 :**
Déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

**Exercice 3 :**
Soit $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ une fonction de clase $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'}{f}$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
Montrer que la série $\sum_n f(n)$ converge et donner un équivalent, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n} f(k)$.

**Exercice 3 :**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En considérant que tous les $u_n$ sont strictement positifs, étudier la convergence de Etudier la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \sqrt[n]{u_1 \dots u_n}$.

**Exercice 4 :**

1. Soit $u$ une suite réelle telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{Vad}(u)$ des valeurs d'adhérences de $u$ est un intervalle.

2. Soit $f$ une fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ et $u$ une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que :

$$(u_n) \text{ converge} \iff \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$$

**Exercice 5 :**
Déterminer la nature de la série

$$\sum \ln\left(\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)\ln(n+2)}\right)$$

**Exercice 3 :**
Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels.

1. On suppose que $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite. Prouver que $(u_n)$ est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que $(u_{2n})$ converge, $(u_{2n+1})$ converge, mais $(u_n)$ n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ sont convergentes. Prouver que $(u_n)$ est convergente.

**Exercice 4 :**
Une suite $(u_n)$ de nombre réels est appelée suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. On souhaite prouver la récirpoque à la question précédente. Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)$ est bornée.
   (b) On suppose que $(u_n)$ admet une suite extraite convergente. Montrer que $(u_n)$ est convergente.
   (c) Conclure.

**Exercice 5 :**
Soit $(a_n)$ une suite réelle strictement positive et $(b_n)$ une suite réelle. On suppose que $b_n = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ et que la série $\sum a_n$ converge. Etudier la nature de la série $\sum a_n^{b_n}$.

**Exercice 4 :**

1. Montrer qu'une suite $(u_n)$ de réels ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si on peut extraire une suite majorée.
2. Montrer que, de toute suite $(q_n)$ d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire une suite constante.
3. Soit $x$ un irrationnel et $(r_n)$ une suite de rationnels convergeant vers $x$. Pour tout entier $n$, on écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer que $(q_n)$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5 :**
Soit $(a_n)$ une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum a_n$ converge.

1. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$.
2. Que dire dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ ?