Chapitre 3 : Fonctions affines

Table des matières

Contenu

- Image, antécédent (algébrique et graphique).
- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

1 Caractérisation des fonctions affines

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition:
Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, une fonction affine f est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:
La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est affine mais $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ ne l'est pas.

Exemple:
Soit la fonction affine définie par $f : x \mapsto 5x + 2$, 5 est le coefficient directeur et 2 est l'ordonnée à l'origine

! Remarque

Une fonction affine est simplement l'application du programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Multiplier par m
- Ajouter p

1.2 Représentations graphiques

Graphiquement, une fonction affine est représentée par une droite.

Méthode: *Représenter une fonction affine*
Représenter graphiquement une fonction affine c'est tracer sa courbe représentative.
Pour cela, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que :

$$\begin{cases} y_A = f(x_A) = m \times x_A + p \\ y_B = f(x_B) = m \times x_B + p \end{cases}$$

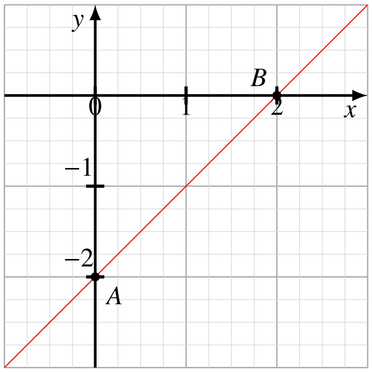
puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Méthode: *Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine*

- m se détermine en trouvant deux points $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ par lesquels passe la droite, puis en calculant le taux d'accroissement : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- p se détermine en lisant l'intersection courbe/ordonnées.

Exercice:
Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f vérifiant $f(1) = 4$ et $f(5) = -2$.

Exemple:



- L'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées est en -2.
  On a donc $p = -2$.
- La courbe passe par les points $A(0, -2)$ et $B(2; 0)$.
  On a donc $m = \dfrac{0-(-2)}{2-0} = 1$.

On a donc $f(x) = x - 2$.

2 Etude d'une fonction affine

2.1 Sens de variation

Théorème:
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $m < 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Exercice:
Quel est le sens de variation des fonctions suivantes ?

- $f : x \mapsto 8$
- $g : x \mapsto -3x + 5$
- $h : x \mapsto x$

Remarque

Les variations d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ peuvent être résumées dans un tableau dit de variation. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
f	$\nearrow$

2.2 Signe d'une fonction affine

Définition:
Soit f une fonction affine.

- f est positive sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0$.
- f est négative sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \leq 0$.

Remarque

- Déterminer si une fonction est positive ou négative revient à résoudre une inéquation.
- Si une fonction affine f est non constante, alors il existe un unique réel r pour lequel $f(r) = mr + p = 0$. D'où $r = -\frac{p}{m}$.

De la même manière que pour les variations, on résume le signe d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dans un tableau dit de signe. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice :
Soit $f : x \mapsto 5x - 2$ une fonction affine. Tracer sa courbe représentative puis donner les tableaux de variations et de signes.

3 Exercice bilan

Soit f une fonction affine telle que $f(5) = 2$ et $f(-4) = -2$.

1. Déterminer l'expression algébrique de f.
2. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
3. Calculer $f(3)$.
4. Quel est le sens de variation de f ?
5. Etablir le tableau de signe de f.