Chapitre 2 : Suites numériques

Table des matières

Contenue

- Suites arithmétiques : moyenne arithmétique de deux nombres, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite arithmétique , notation $\sum$.
- Suites géométriques : moyenne géométrique de deux nombres positifs, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite géométrique , notation $\sum$.

1 Suites arithmétiques

Définition:
Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel quelconque. r s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$.
  On a donc $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$ et $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$.
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$.
  On a donc $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$ et $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriétés:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}, r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

Propriété:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} \text{Nombre de terme} \times \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2} = \dfrac{5n(n+1)}{2}$.
- Pour (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=3}^{n} v_k = (n-2)\dfrac{v_3 + v_n}{2} = (n-2)\dfrac{9,5 - 1,5n}{2}$.

2 Suites géométriques

Définition:
Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ où q est un réel quelconque strictement positif.
q s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$.
  On a donc $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$ et $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$.
  On a donc $v_1 = q \times v_0 = 0,5 \times 200 = 100$ et $v_2 = q \times v_1 = 0,5 \times 100 = 50$.

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriétés:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}, q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

Propriété:
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -3(1-2^{n+1})$.
- Pour (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=3}^{n} v_k = v_3 \frac{1-q^{n-2}}{1-q} = 50(1-0,5^{n-2})$.

3 Exercice Bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 25$.
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Calculer $\sum_{k=0}^{14} u_k$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 30$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Calculer $\sum_{k=1}^{50} v_k$.