Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $\dfrac{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \dfrac{2}{5}$.
2. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $(3x-2)(x+1)^2$ est une factorisation de $3x^3+4x^2-x-2$.
3. Résoudre l'équation $4(x-1)(2x+3) = 0$.

Solution :

1. On a $\dfrac{\sqrt{3}^2 \times \sqrt{12}}{3\sqrt{75}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3 \times 4}}{3 \times \sqrt{3 \times 25}} = \dfrac{\cancel{3} \times \cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{4}}{\cancel{3} \times \cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$
2. On a $(3x-2)(x+1)^2 = (3x-2)(x^2+2x+1) = 3x^3+4x^2-x-2$
3. On a $x-1=0$ ou $2x+3=0$ donc $S = \left\{1\ ; -\dfrac{3}{2}\right\}$

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 6 points)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -\dfrac{1}{4}$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{80}.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{80} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{80}$.

Solution :

1. On a :
   $u_1 = u_0 + r = 5 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{19}{4} = 4,75$ et $u_2 = u_3 + r = \dfrac{19}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{18}{4} = 4,5$ et $u_3 = u_2 + r = \dfrac{18}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{4} = 4,25$
2. On a $u_{n+1} = u_n + r = u_n - \dfrac{1}{4}$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car $r = -\dfrac{1}{4} < 0$.
4. On a $u_n = u_0 + nr = 5 - \dfrac{1}{4}n$
5. On a $u_{80} = 5 - \dfrac{1}{4} \times 80 = 5 - 20 = -15$
6. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{80} u_n = (80+1) \times \dfrac{(u_0+u_{80})}{2} = 81 \times \dfrac{5-15}{2} = -\dfrac{405}{2} = -202,5$

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(... / 2 points)*
On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \cos(5\pi x + \pi) + 9x^6$$

1. Déterminer une primitive F de f.
2. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$\int_0^1 f(x)dx$$

Solution :

1. La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{5\pi}\sin(5\pi x + \pi) + \frac{9}{7}x^7$ est une primitive de f.
2. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{1}{5\pi}\sin(5\pi + \pi) + \frac{9}{7} \times 1^7\right) - \left(\frac{1}{5\pi}\sin(5 \times 0 + \pi) + \frac{9}{7} \times 0^7\right) \qquad (1) \\ &= \frac{9}{7}\end{aligned}$$

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $\dfrac{\sqrt{5}^2 \times \sqrt{20}}{5\sqrt{45}} = \dfrac{2}{3}$.
2. Justifier, en montrant les étapes de calculs, que $(2x+3)(x-1)^2$ est une factorisation de $2x^3 - x^2 - 4x + 3$.
3. Résoudre l'équation $6(x+1)(3x-2) = 0$.

Solution :

1. On a $\dfrac{\sqrt{5}^2 \times \sqrt{20}}{5\sqrt{45}} = \dfrac{5 \times \sqrt{5 \times 4}}{5 \times \sqrt{5 \times 9}} = \dfrac{\cancel{5} \times \cancel{\sqrt{5}} \times \sqrt{4}}{\cancel{5} \times \cancel{\sqrt{5}} \times \sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$
2. On a $(2x+3)(x-1)^2 = (2x+3)(x^2 - 2x + 1) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$
3. On a $x + 1 = 0$ ou $3x - 2 = 0$ donc $S = \left\{-1\ ;\dfrac{2}{3}\right\}$

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 6 points)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{20}.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{20} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

Solution :

1. On a :
$u_1 = u_0 + r = 10 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{21}{2} = 10,5$ et $u_2 = u_3 + r = \dfrac{21}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} = 11$ et $u_3 = u_2 + r = \dfrac{22}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{2} = 11,5$
2. On a $u_{n+1} = u_n + r = u_n + \dfrac{1}{2}$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car $r = \dfrac{1}{2} > 0$.
4. On a $u_n = u_0 + nr = 10 + \dfrac{1}{2}n$
5. On a $u_{20} = 10 + \dfrac{1}{2} \times 20 = 10 + 10 = 20$
6. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{20} u_n = (20+1) \times \frac{(u_0 + u_{20})}{2} = 21 \times \frac{10+20}{2} = \frac{630}{2} = 315$

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(... / 2 points)*
On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \cos(9\pi x + \pi) + 5x^7$$

1. Déterminer une primitive F de f.
2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Solution :

1. La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{9\pi}\sin(9\pi x + \pi) + \frac{5}{8}x^8$ est une primitive de f.
2. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{1}{9\pi}\sin(9\pi + \pi) + \frac{5}{8} \times 1^8\right) - \left(\frac{1}{9\pi}\sin(9 \times 0 + \pi) + \frac{5}{8} \times 0^8\right) \qquad (2) \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$