Sujet 1

Cours :
Enoncer et démontrer le théorème de Césaro.

Exercice 1 :

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Dans le cas $\alpha \leq 0$, à l'aide d'une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) Dans le cas $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.

2. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$$

Exercice 2 :
On considère la suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Montrer que cette suite converge.

Exercice 3 :
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{-1}$$

Exercice 4 :
Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \sin(\pi n! e)$$

Sujet 2

Cours :
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.

Exercice 1 :

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ de même nature.}$$

2. Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$$

Exercice 2 :
Soit a un réel positif et :

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$$

Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ selon la valeur de a.

Exercice 3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans le cas où $\alpha \leq 0$ ou $\alpha > 1$.

2. On suppose à présent que $0 < \alpha \leq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$.

   (a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

   (b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Sujet 3

Cours :
Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

Exercice 1 :
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que :

$$\forall A, B \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$$

   .
   Puis, démontrer que :

$$\forall p \geq 1,\ \|A^p\| \leq n^{p-1}\|A\|^p$$

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

Exercice 2 :
Soit a un réel positif et :

$$u_n = \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$$

Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 3 :

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 4 :
Déterminer la convergence puis calculer la somme de la série :

$$\sum_{k\geq n} \binom{k}{n} x^k$$

Exercice 5 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui est croissante et tend vers $+\infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{a_n} = l$.

Montrer que $\displaystyle\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n} x_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 :
On pose pour tous entiers naturels non nuls n et p :

$$u_{n,p} = \left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)^{\alpha}$$

Pour quelles valeurs de α cette famille est-elle sommable ?

Exercice 5 :
Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente.

1. Montrer que pour tout n tendant vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k = o(n)$$

On suppose de plus qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1,\ n a_n > -c$.

2. Montrer que pour tout n tendant vers l'infini,

$$\sum_{k=1}^{n} k|a_k| \leq 2cn + o(n)$$

3. On pose, pour $n \geq 1,\ t_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$.
   Justifier l'existence de t_n et montrer que pour n tendant vers l'infini, $t_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 5 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante qui converge vers 0.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n-1})$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, montrer que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n-1})$$