Chapitre 3 : Fonctions exponentielles

Table des matières

Contenu

- définition de la fonction $x \mapsto ax$ pour x positif comme prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique $(a_n)n \in \mathbb{N}$; extension à $\mathbb{R}_-$ en posant $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
- sens de variation selon les valeurs de a.
- allure de la courbe représentative selon les valeurs de a.
- propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x \times a^y$, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$, $a^{nx} = (a^x)^n$.
- cas particulier de l'exposant $\dfrac{1}{n}$ pour calculer un taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives.

1 Définition

On connait l'expression d'une suite géométrique comme une puissance entière d'un certain nombre q strictement positif : la raison. C'est-à-dire la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut étendre cette définition pour des valeurs non entières.

Définition:
Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction exponentielle (de base a) $f : x \mapsto a^x$:

- prolonge les valeurs numériques de la suite géométrique (a^n) à des valeurs non entières positives de la variable ;
- est définie pour $x < 0$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Exemple:

- La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est une fonction exponentielle de base 2.
- La fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ est une fonction exponentielle de base $\dfrac{1}{3}$.

2 Représentation graphique et sens de variation

Propriété:
Soit a un nombre réel strictement positif.

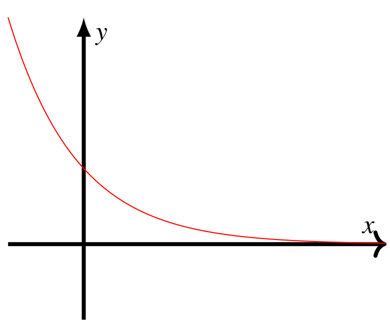
- Si $a > 1$: la fonction $f : x \mapsto a^x$ est strcitement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$: la fonction $f : x \mapsto a^x$ est strcitement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On peut continuer l'analogie avec les suites géométriques en définissant par exemple pour tout n, la suite $v_n = 2 \times 3^n$. On a donc un nombre réel non nul qui multiplie une fonction exponentielle. Au même titre que l'on peut chercher à étudier les variations de (v_n), on peut être amener à étudier plus généralement les variations de fonctions de la forme $x :\mapsto ka^x$.

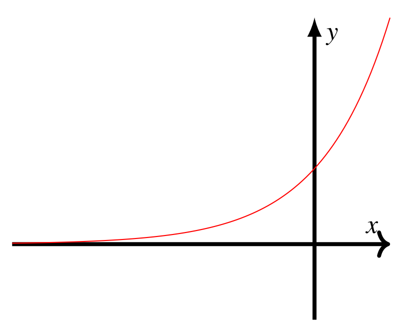
Propriété:
Soit a un nombre réel strictement positif et k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a le même sens de variation que $x \mapsto a^x$.
- Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a le sens de variation contraire de $x \mapsto a^x$.

On obtient alors deux formes de représentation graphique selon les valeurs de a :



$\boxed{0 < a < 1}$



$\boxed{a > 1}$

3 Propriétés algébriques

Les calculs de puissances entières connues se prolongent pour des puissances non entières.

Propriété:
Soit a un nombre réel strictement positif et x, y deux réels quelconques. On a :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{xy} = (a^x)^y$

Exercice:
Simplifier les expressions suivantes

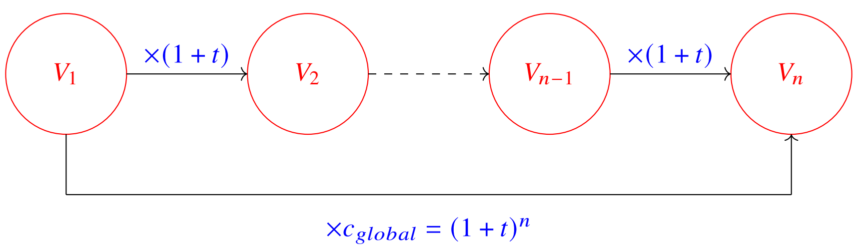
- $3^{2,5} \times 3^{4,17}$
- $\dfrac{2^{5,89}}{2^{3,14}}$
- $\dfrac{5^{24,1} \times (5^{2.13})^2}{5^6 \times 5^{12,12}}$

4 Application au taux d'évolution

Ces fonctions peuvent trouver une utilité, en plus du domaine des suites géométriques, dans la détermination d'un coefficient multiplicateur global d'évolutions successives d'une donnée.
En effet, on rappelle que pour évolution de t%, on multiplie une certaine valeur de départ V_D par $(1 + t)$ pour obtenir une valeur d'arrivée V_A. On a donc :

$$V_A = V_D \times (1 + t)$$

Pour une succession d'évolution de t%, on rappelle que le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.
Si on effectue n évolutions successives on a donc $c_{\text{global}} = (1 + t_{\text{global}}) = (1 + t)^n$.



On en déduit donc que :

Propriété:
t étant le taux d'évolution global pendant une certaine période, le taux d'évolution moyen équivalent t_n pendant une période n fois plus courte est défini par la relation :

$$1 + t_n = (1 + t)^{\frac{1}{n}}$$

5 Exercice bilan

Le chiffre d'affaire d'une start-up est passé de de 100 000 euros à 130 000 euros en un an.

1. Déterminer le taux d'évolution annuel du chiffre d'affaire.
2. En déduire le taux d'évolution mensuel du chiffre d'affaire.