Exercice 1: Automatismes *(.../ 3 points)*

1. Factoriser l'expression $A(x) = (2x+1)^2 - (x-2)^2$
2. Développer et réduire l'expression $B(x) = x^2 - (x-6)(5-x)$
3. Résoudre l'équation $(x-6)(4-x)(2x+1) = 0$.

Solution :

1. On a $A(x) = ((2x+1) - (x-2)) \times ((2x+1) + (x-2)) = (x+3)(3x-1)$.
2. On a $B(x) = x^2 - (5x - x^2 - 30 + 6x) = x^2 - 5x + x^2 + 30 - 6x = 2x^2 - 11x + 30$.
3. On a $x - 6 = 0$ ou $4 - x = 0$ ou $2x + 1 = 0$ donc $S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;4\ ;6\right\}$.

Exercice 2: Tronc commun *(.../ 8 points)*

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 5$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer u_{23}.
   (d) Calculer $\sum_{k=0}^{23} u_k$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 2000$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Calculer v_5.
   (d) Calculer $\sum_{k=1}^{5} v_k$.

Solution :

1. (a) On a $u_{n+1} = u_n + 5$.
   (b) On a $u_n = 10 + 5n$.
   (c) On a $u_{23} = 10 + 5 \times 23 = 125$.
   (d) On a $\sum_{k=0}^{23} u_k = 24 \times \frac{10 + 125}{2} = 1620$.
2. (a) On a $v_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n$.
   (b) On a $v_n = 2000 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(c) On a $v_5 = 2000 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{2000}{256} = \dfrac{125}{16}$.

(d) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} v_k = 2000 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{10625}{4}$.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(. . . / 2 points)*
Soit f définie pour tout $x \in [1;5]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 5 & \text{si} \quad x \in [1;3] \\ x & \text{si} \quad x \in]3;5] \end{cases}$$

Calculer la valeur moyenne de f sur $[1;5]$.
Solution :
On a :

$$\begin{aligned} \mu_f &= \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 4x^3 + 5dx + \frac{1}{4}\int_3^5 xdx \\ &= \frac{1}{4}\left[x^4 + 5x\right]_1^3 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5 \\ &= \frac{1}{4}\left(3^4 + 5\times 3 - 1^4 - 5\times 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\times 90 + \frac{1}{4}\times 8 \\ &= \frac{49}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 1: Automatismes *(.../ 3 points)*

1. Factoriser l'expression $A(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.
2. Développer et réduire l'expression $B(x) = x^3 + (x^2+5)(2x+1)$.
3. Résoudre l'équation $(x-7)(2-x)(6+9x) = 0$.

Solution :

1. On a $A(x) = ((x+3)-(x-5)) \times ((x+3)+(x-5)) = 8(2x-2)$.
2. On a $B(x) = x^3 + (2x^3 + x^2 + 10x + 5) = 3x^3 + x^2 + 10x + 5$.
3. On a $x-7=0$ ou $2-x=0$ ou $6+9x=0$ donc $S = \left\{-\frac{2}{3}\ ; 2\ ; 7\right\}$.

Exercice 2: Tronc commun *(.../ 8 points)*

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 20$ et de raison $r = 10$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer u_{23}.
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{23} u_k$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Calculer v_5.
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} v_k$.

Solution :

1. (a) On a $u_{n+1} = u_n + 10$.
   (b) On a $u_n = 20 + 10(n-1)$.
   (c) On a $u_{23} = 20 + 10 \times 22 = 240$.
   (d) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{23} u_k = 23 \times \frac{20+240}{2} = 2990$.
2. (a) On a $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$.
   (b) On a $v_n = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) On a $v_5 = 200 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{25}{4}$.

(d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} v_k = 200 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1575}{4}$.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(.../ 2 points)*
Soit f définie pour tout $x \in [0;4]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+4 & \text{si} \quad x \in [0;2] \\ x & \text{si} \quad x \in]2;4] \end{cases}$$

Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;4]$.
Solution :
On a :

$$\begin{aligned} \mu_f &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 3x^2+4dx + \frac{1}{4}\int_2^4 xdx \\ &= \frac{1}{4}\left[x^3+4x\right]_0^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(2^3+4\times 2-0^4-4\times 0\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\times 16 + \frac{1}{4}\times 6 \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned} \tag{2}$$