Sujet 1

Cours :
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1 :
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 2 :
Soit A un ouvert de E et B une partie de E.

1. Montrer que : $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Montrer que : $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset$.
3. Si B est dense dans E, montrer que : $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.
4. Si A et B sont denses dans E, montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 3 :
Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque :

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}\right\}$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$?
2. Soit $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

Sujet 2

Cours :
Montrer qu'une réunion d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$:
   $$d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$$
   Prouver que A est convexe.

Exercice 2 :
On considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert.
Démontrer que $F = E$.

Sujet 3

Cours :
Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Exercice 1 :
Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normée E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 2 :
Soient A et B deux parties non vides de E.
Montrer que :

$$d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, B)$$

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $(a,b) \in E^2$, $(r, r') \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que :

$$B(a,r) + B(b,r') = B(a+b, r+r')$$

Exercice 4 :
Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E.

1. Démontrer que $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose :
   $$A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, xy = 1\} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$
   Calculer $A + B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{A + B}$.
   Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 :

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

1. $A = \{\text{suites croissantes}\}$
2. $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$
3. $C = \{\text{suites périodiques}\}$

Exercice 4 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
   Démontrer que, pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p,\ n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln(n)),\ n \geq 1\}$ est dense dans $[-1;1]$.

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.