

**Problème :** (... / 12 points)

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'une entreprise sous différents aspects.

**Partie A :**

L'entreprise cherche à financer une assurance ses employés. Pour cela, le PDG compare les deux offres proposées :

- *Proposition A*: Le montant de l'assurance est de 300 euros la première année puis augmente de 15 euros par an.
- *Proposition B*: Le montant de l'assurance est de 200 euros la première année et augmente de 2% par an.

On note  $a_n$  le montant de l'assurance avec la proposition *A* et  $b_n$  celui avec la proposition *B* la  $n$ -ième année. Ainsi  $a_1 = 300$  et  $b_1 = 200$ .

1. (a) Calculer  $a_2$  puis  $a_3$ .  
 (b) Donner la nature de la suite  $(a_n)$  en précisant sa raison.  
 (c) Donner, pour tout entier  $n$ ,  $a_n$  en fonction de  $n$ .
2. (a) Calculer  $b_2$  puis  $b_3$ .  
 (b) Donner la nature de la suite  $(b_n)$  en précisant sa raison.  
 (c) Donner, pour tout entier  $n$ ,  $b_n$  en fonction de  $n$ .
3. L'entreprise souhaite souscrire un abonnement pour 5 000 employés pour une durée de 15 ans.
  - (a) Pour chaque proposition, quelle est le coût de l'assurance la 15-ième année ?
  - (b) Pour chaque proposition, combien l'entreprise dépenserait-elle au total sur 15 ans ?  
 Déduire de cela la proposition la plus avantageuse.

**Partie B :**

L'entreprise s'intéresse désormais au bénéfice effectué en fonction du nombre de produits vendus.

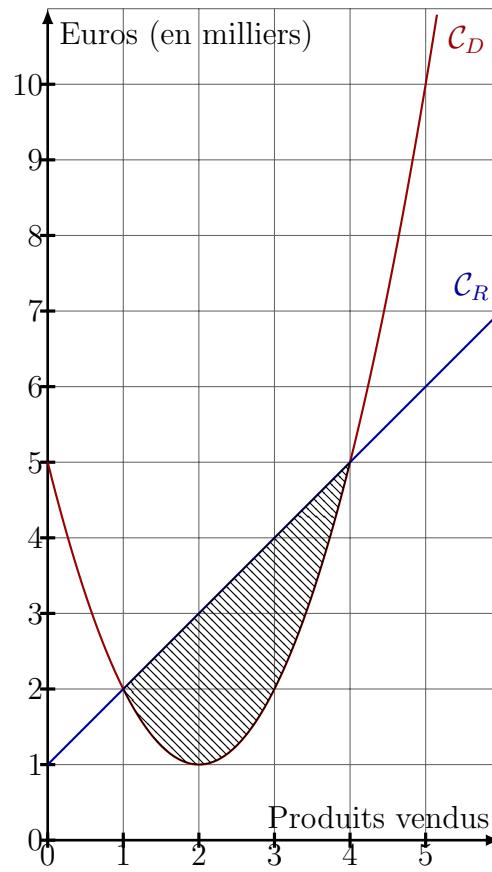
Pour cela, l'entreprise s'appuie sur l'étude des fonctions  $R$  et  $D$  représentant respectivement la recette de l'entreprise et les dépenses de l'entreprise.

On estime que pour  $x$  produits vendus :

- L'entreprise a une recette  $R(x) = x + 1$  milliers d'euros.
- L'entreprise a une dépense de  $D(x) = x^2 - 4x + 5$  milliers d'euros.

On considère la représentation graphique ci-dessous des fonctions  $R$  et  $D$ .

4. Déterminer graphiquement les dépenses de l'entreprise pour 3 produits vendus. Retrouver ce résultat par le calcul.
5. Déterminer graphiquement le nombre de produits à vendre pour obtenir une recette de 6 000 euros. Retrouver ce résultat par le calcul.
6. Etablir le tableau de variation de la fonction  $D$  puis en déduire son minimum, pour quelle valeur de  $x$  est-il atteint ?
7. On cherche à étudier la fonction  $D$  sur l'intervalle  $[0; 6]$ .
  - (a) Déterminer l'expression de  $D'(x)$ , la dérivée de  $D$ , en fonction de  $x$ .
  - (b) Etudier le signe de  $D'(x)$  selon les valeurs de  $x$ . On représentera le résultat dans un tableau de signe.
  - (c) En déduire le tableau de variation complet de  $D$ . Etudier la cohérence de vos résultats avec ceux de la question 6.



### Partie C :

On rappelle que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette est supérieure aux dépenses.

8. Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise un bénéfice.

On introduit la fonction  $B(x) = R(x) - D(x)$  représentant le bénéfice (en milliers d'euros) effectué par l'entreprise pour  $x$  produits vendus.

9. Exprimer  $B(x)$  en fonction de  $x$ .  
On rappelle que les expressions de  $R(x)$  et  $D(x)$  sont données au début de la partie  $B$ .

10. Déterminer une primitive  $\mathcal{B}$  de  $B$  sur l'intervalle  $[1; 4]$ .

11. En déduire la valeur de l'aire hachurée.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  est donné par :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

12. On admet que le bénéfice moyen effectué par l'entreprise est égal à la valeur moyenne de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[1; 4]$ .  
Déterminer la valeur du bénéfice moyen de l'entreprise.