Problème : *(... / 12 points)*

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'une entreprise sous différents aspects.

Partie A :

L'entreprise cherche à financer une assurance ses employés. Pour cela, le PDG compare les deux offres proposées :

- *Proposition A:* Le montant de l'assurance est de 300 euros la première année puis augmente de 15 euros par an.
- *Proposition B:* Le montant de l'assurance est de 200 euros la première année et augmente de 2% par an.

On note a_n le montant de l'assurance avec la proposition A et b_n celui avec la proposition B la n-ième année.
Ainsi $a_1 = 300$ et $b_1 = 200$.

1. (a) Calculer a_2 puis a_3.
   On a $a_2 = 315$ et $a_3 = 330$.

   (b) Donner la nature de la suite (a_n) en précisant sa raison.
   La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 15.

   (c) Donner, pour tout entier n, a_n en fonction de n.
   On a pour tout entier n, $a_n = a_1 + r(n-1) = 300 + 15(n-1)$.

2. (a) Calculer b_2 puis b_3.
   On a $b_2 = 204$ et $b_3 = 208,08$

   (b) Donner la nature de la suite (b_n) en précisant sa raison.
   La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $1,02$.

   (c) Donner, pour tout entier n, b_n en fonction de n.
   On a pour tout entier n, $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 200 \times 1,02^{n-1}$.

3. L'entreprise souhaite souscrire un abonnement pour 5 000 employés pour une durée de 15 ans.

   (a) Pour chaque proposition, quelle est le coût de l'assurance la 15-ième année ?
   On a :

   - Proposition A : on a $a_{15} = 510$. Soit 510 euros.
   - Proposition B : on a $b_{15} = 263,89$. Soit $263,89$ euros.

   (b) Pour chaque proposition, combien l'entreprise dépenserait-elle au total sur 15 ans ?
   Déduire de cela la proposition la plus avantageuse. On a :

   - Proposition A : on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} a_k = 15 \times \frac{300+510}{2} = 6075$. Soit 6075 euros.
   - Proposition B : $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} b_k = 200 \times \frac{1-1,02^{15}}{1-1,02} = 3458,68$. Soit $3458,68$ euros.

   La proposition B est donc la plus avantageuse car moins coûteuse.

Partie B :

L'entreprise s'intéresse désormais au bénéfice effectué en fonction du nombre de produits vendus.
Pour cela, l'entreprise s'appuie sur l'étude des fonctions R et D représentant respectivement la recette de l'entreprise et les dépenses de l'entreprise.

On estime que pour x produits vendus :

- L'entreprise a une recette $R(x) = x + 1$ milliers d'euros.
- L'entreprise a une dépense de $D(x) = x^2 - 4x + 5$ milliers d'euros.

On considère la représentation graphique ci-dessous des fonctions R et D.

4. Déterminer graphiquement les dépenses de l'entreprise pour 3 produits vendus. Retrouver ce résultat par le calcul.
   On lit graphiquement que l'entreprise dépense 2 000 euros pour 3 produits vendus.
   Par le calcul on a $D(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$.

5. Déterminer graphiquement le nombre de produits à vendre pour obtenir une recette de 6 000 euros. Retrouver ce résultat par le calcul.
   On lit graphiquement que l'entreprise doit vendre 5 produits pour obtenir une recette de 6 000 euros.
   Par la calcul on résout l'équation $R(x) = 6$ soit donc $x + 1 = 6$.

6. Etablir le tableau de variation de la fonction D puis en déduire son minimum, pour quelle valeur de x est-il atteint ?

x	0		2		5
f	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

   La minimum de D est 1 et est atteint pour $x = 2$.

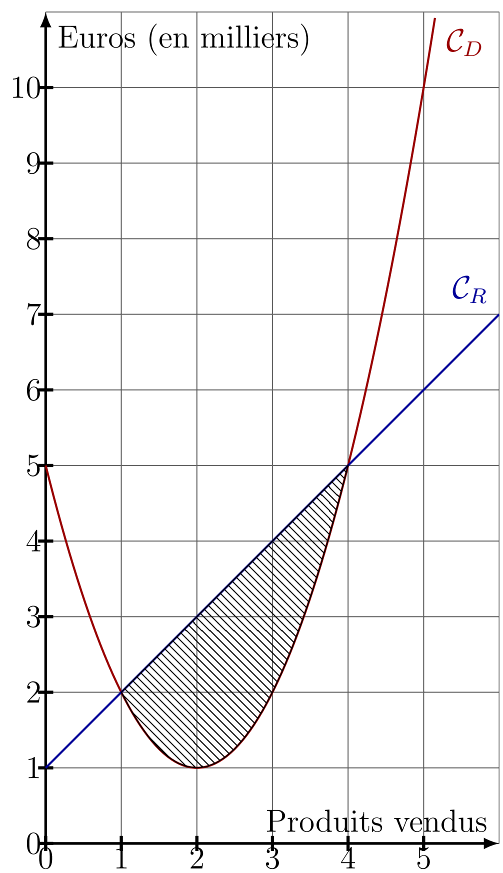
7. On cherche à étudier la fonction D sur l'intervalle $[0; 6]$.
   (a) Déterminer l'expression de $D'(x)$, la dérivée de D, en fonction de x.
   On a $D'(x) = 2x - 4$.
   (b) Etudier le signe de $D'(x)$ selon les valeurs de x. On représentera le résultat dans un tableau de signe.

x	0		2		5
$D'(x)$		$-$	0	$+$	

   (c) En déduire le tableau de variation complet de D. Etudier la cohérence de vos résultats avec ceux de la question 6.

x	0		2		5
$D'(x)$		$-$	0	$+$	
D	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

   On retrouve donc bien le même tableau de variation que la question 6.



Partie C :

On rappelle que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette est supérieure aux dépenses.

8. Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise un bénéfice.
   On lit graphiquement que l'entreprise réalise un bénéfice sur l'intervalle $[1;4]$.

On introduit la fonction $B(x) = R(x) - D(x)$ représentant le bénéfice (en milliers d'euros) effectué par l'entreprise pour x produits vendus.

9. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   On rappelle que les expressions de $R(x)$ et $D(x)$ sont données au début de la partie B.
   On a $B(x) = R(x) - D(x) = x + 1 - (x^2 - 4x + 5) = -x^2 + 5x - 4$.
10. Déterminer une primitive $\mathcal{B}$ de B sur l'intervalle $[1;4]$.
    On a $\mathcal{B}(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x$ qui est une primitive de B.
11. En déduire la valeur de l'aire hachurée.
    L'aire hachurée est égale à l'intégrale de B entre 1 et 4 soit :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 B(x)dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \times 4^2}{2} - 4 \times 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5 \times 1^2}{2} - 4 \times 1\right) \\
&= \frac{16}{6} + \frac{11}{6} \\
&= \frac{27}{6} = 4,5
\end{aligned} \tag{1}$$

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est donné par :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

12. On admet que le bénéfice moyen effectué par l'entreprise est égal à la valeur moyenne de la fonction B sur l'intervalle $[1;4]$.
    Déterminer la valeur du bénéfice moyen de l'entreprise.

    On a le bénéfice moyen qui est donné par :

$$\mu_B = \frac{1}{3}\int_1^4 B(x)dx = \frac{1}{3} \times \frac{27}{6} = \frac{27}{18} = 1,5$$

   Le bénéfice moyen de l'entreprise est donc de 1 500 euros.