1 Calculs de probabilités

Exercice 1:
Un dé dodécaédrique est un dé à douze faces. On lance un tel dé dont les faces sont numérotées de 1 à 12. On s'intéresse au numéro qui apparaît sur la face supérieure.

1. Donner l'ensemble Ω de toutes les issues possibles.
2. Donner la liste des issues qui forment les événements suivants et préciser le nombre d'issues qu'ils contiennent.
   (a) A : "Obtenir un numéro pair"
   (b) B : "Obtenir un numéro multiple de 3"
   (c) C : "Obtenir un numéro pair et multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments à la fois dans A et dans B. On notera $C = A \cap B$
   (d) D : "Obtenir un numéro au moins pair ou multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On notera $D = A \cup B$
   (e) E : "Obtenir un numéro qui n'est pas un multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans B. On notera $E = \bar{B}$
3. On considère les événements F : "Obtenir un numéro impair" et G : "Obtenir un multiple de deux". Déterminer puis dénombrer les issues réalisant chacun des événements suivants.
   (a) $F \cap G$ | (b) $F \cup G$ | (c) $\bar{F} \cap \bar{G}$ | (d) $\bar{F} \cap \bar{G}$

Exercice 2:
On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On note P l'issue Pile et F l'issue Face. L'issues Pile au premier lancer et Face au second est noté PF.

1. A l'aide d'un arbre ou d'un tableau à double entrée, déterminer combien d'éléments possède l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. On considère les événements A "On obtient une seule fois Pile" et B "On obtient Face au second lancer". Combien A et B possèdent-ils d'éléments ? Ecrire A et B sous forme d'ensemble.
3. (a) Décrire par une phrase les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ et $\bar{B}$
   (b) Combien d'éléments possèdent-ils ? Les préciser.

Exercice 3:
Un sac contient quatre jetons bleus numérotés de 1 à 4 et trois jetons rouges numérotés de 1 à 3. On prélève au hasard un jeton du sac et on note sa couleur et son numéro.

1. Ecrire l'ensemble des issues possibles
2. On considère les événements suivants :
   - A : "On obtient un jeton portant un numéro pair"
   - R : "On obtient un jeton rouge"

   (a) Ecrire l'ensemble des issues appartenant à A et l'ensemble des issues appartnant à R.
   (b) Ecrire l'ensemble des issues appartenant à l'événement $A \cap R$
   (c) Ecrire l'ensemble des issues appartenant à l'événement $A \cup R$
3. Quel est l'événement $\bar{A}$, événement contraire de A ? Ecrire les issues appartenant à $\bar{A}$

Exercice 4:
La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est donnée par le tableau ci-dessous.

Issue	4	5	6	7	8	9
Probabilité	$0,15$	p	$3p$	$2p$	$0,05$	$2p$

1. Calculer p
2. Calculer la probabilité d'une issue multiple de trois
3. A-t-on autant de chance d'avoir une issue paire qu'une issue impaire ? Justifier

Exercice 5:
On lance un dé à 12 face bien équilibré. On lit après chaque lancer le numéro de la face supérieure.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : "Faire apparaître un numéro pair inférieur à 9".
3. Calculer la probabilité de l'événement B : "Faire apparaître un numéro pair ou un numéro inférieur à 5".

Exercice 6:
On lance un dé à six faces truqué : les probabilités de chaque résultat pair sont égales au double des probabilités de chaque résultat impair. Déterminer les probabilités de chaque issue.

Exercice 7:
On donne les événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,61$ et $\mathbb{P}(B) = 0,27$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,13$.

Exercice 8:
Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : a et b.

- 8% des pièces présentent le défaut a au moins.
- 15% des pièces présentent le défaut b au moins.
- 5% des pièces présentent à la fois les défauts a et b et sont directement mises au rebut.
- 90% des pièces qui présentent un seul défaut peuvent être réparées et les autres sont mises au rebut.

1. Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

	Avec défaut a	**Sans défaut a**	**Total**
Avec défaut b			
Sans défaut b			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.
   (a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle présente un seul défaut.
   (b) Calculer la probabilité p_2 qu'elle n'ait aucun défaut.
3. Montrer que la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée (directement ou après réparation) est de $0,937$.

Exercice 9:
Une personne possède une vidéothèque de 2 400 films. Ils appartiennt à 2 catégories: Action ou Comédie ; et ils proviennent de 3 réfion différentes : Europe, Amérique, Asie.

- La moitié de ses films sont européens et il y a deux fois plus de films américains qu'asiatiques.
- 75% des films sont des films d'action et, parmi eux, 42% sont américains.
- Parmi les films asiatiques, il y a autant de films d'actions que de comédies.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Europe	**Amérique**	**Asie**	**Total**
Action				
Comédie				
Total				

2. On prend au hasard un film dans cette vidéothèque. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : "le film est une comédie" ;
   - B : "le film est européen".
3. Calculer la probabilité de $A \cap B$ et $A \cup B$.
4. On choisit une comédie. Calculer la probabilité qu'elle soit européenne. On choisit un film américain. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une comédie.

Exercice 10:
Une étude de l'organisation mondiale du tourisme montre que, pour 1 000 touristes venus en Europe l'année dernière, 14% sont venus en France. Parmi les touristes qui sont venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour. Parmi les touristes qui ne sont pas venus en France, 15% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

Nombre de touristes	**Venus en France**	**Non venus en France**	**Total**
Ayant dépensé plus de 900 euros			
Ayant dépensé moins de 900 euros			
Total			1000

2. On choisit au hasard un touriste venu en Europe. Tous les touristes ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants.
   - F : "Le touriste a choisi comme destination la France"
   - A : "Le touriste a dépensé plus de 900 euros popur son séjour"

   (a) Calculer $\mathbb{P}(\bar{F} \cap A)$.
   (b) Calculer la probabilité que le touriste ait dépensé plus de 900 euros pour son séjour.

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 11:
100 élèves de Première technologique se répartissent de la façon suivante.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent aucun sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des élèves 100 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :

- F : "L'élève rencontré est une fille"
- G : "L'élève rencontré est un garçon"
- S : "L'élève rencontré pratique un sport"

1. Traduire par une phrase chacun des deux événements $F \cap S$ et $G \cap \bar{S}$.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(S)$; $\mathbb{P}(F \cap S)$; $\mathbb{P}(\bar{S})$ et $\mathbb{P}(G \cap \bar{S})$.
3. Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(F)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(G)$.
4. Calculer la probabilité que, sachant que l'élève est un garçon, il pratique un sport. Arrondier la résultat à 10^{-2}.

Exercice 12:
A l'atelier de coupe, deux machines M_1 et M_2 découpent les pièces, puis celles-ci sont stockées sans distinction de provenance.

- La machine M_1 découpe 60% des pièces et 5% de ces pièces sont défectueuses.
- La machine M_2 découpe 40% des pièces et $2,5$% de ces pièces sont défectueuses.

On notera :

- E_1 l'événement "la pièce a été découpée par la machine M_1".
- E_2 l'événement "la pièce a été découpée par la machine M_2".
- D l'événement "la pièce est défectueuse".

1. On prélève au hasard une pièce de la production totale. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(E_1 \cap D)$, $\mathbb{P}(E_2 \cap D)$ et $\mathbb{P}(D)$.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_D(E_1)$ et $\mathbb{P}_D(E_2)$.

Exercice 13:
Dans un jeu de 32 cartes, qui compte 12 figures, on extrait au hasard successivement et sans remise deux fois une carte . On note F_1 l'événement "la première carte extraite est une figure" et F_2 l'événement "la seconde carte extraite est une figure".

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Déterminer la probabilité que les deux cartes extraites soient des figures.
3. Justifier que la probabilité que la deuxième carte extraite soit une figure est égale à $0,375$.
4. En déduire la probabilité que la première carte extraite soit une figure, sachant que la seconde est une figure.

Exercice 14:
Un jardinier dispose d'un lot de bulbes de tulipes : 40% sont à fleur rouge, 30% à fleur jaune et le reste est à fleur blanche. D'autre part, 85% des bulbes à fleur rouge, 90% des bulbes à fleur jaune et 80% des bulbes à fleur blanche donnent une fleur une fois plantées.
On choisit un bulbe au hasard dans ce lot. On note R l'événement "le bulbe est à fleur rouge", J l'événement "le bulbe est à fleur jaune" et F l'événement "le bulbe fleurit".

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   (b) Justifier que la probabilité que le bulbe fleurisse une fois planté est égale à $0,85$.
2. (a) Sans calcul, justifier que les événements R et F sont indépendants.
   (b) Les événements J et R sont-ils indépendants ?

Exercice 15:
Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier, l'autre lié à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

- 4% des calculatrices présentent un défaut de clavier.
- En présence du défaut de clavier, 3% des calculatrices présentent un défaut d'affichage.
- En l'absence de défaut de clavier, 94% des calculatrices ne présentent pas de défaut d'affichage.

On note C l'événement "La calculatrice présente un défaut de clavier" et A l'événement "La calculatrice présente un défaut d'affichage".

1. (a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes $\mathbb{P}_{\bar{C}}(\bar{A})$, $\mathbb{P}_{\bar{C}}(A)$ et $\mathbb{P}(C)$.
   (b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
   (a) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   (b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(A)$.
   (d) Montrer que la probabilité de l'événement "La calculatrice ne présente aucun défaut" arrondie au millième est égale à $0,902$.

3 Evénements indépendants

Exercice 16:
A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \alpha$. Calculer α dans les cas suivants :

1. A et B sont incompatibles.
2. A et B sont indépendants.
3. A est une partie de B.

Exercice 17:
Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.

- A est l'événement "La carte tirée est un carreau".
- B est l'événement "La carte tirée est un trèfle".
- C est l'événement "La carte tirée est un as".

1. Quels sont les événements incompatibles ?
2. Quels sont les événements indépendants ?

Exercice 18:
Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

- A est l'événement "une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse".
- B est l'événement "une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse".

On admet que $\mathbb{P}(A) = 0,03$ et $\mathbb{P}(B) = 0,07$ et que les événements A et B sont indépendants. Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer la probabilité des événements suivants :

1. E_1 : "Les deux pièces du module sont défectueuses."
2. E_2 : "Au moins une des deux pièces du module est défectueuse".
3. E_3 : "Aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse".

4 Dénombrement

Exercice 19:
On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 5; 11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A. Combien y a-t-il ?

Exercice 20:
On considère l'ensemble $A = \{c; o; s\}$. Donner toutes les permuatations de A. Combien y en a-t-il ?

Exercice 21:
On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 9; 11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3, combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A. Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A. Combien en existe-t-il ?

Exercice 22:
Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

Exercice 23:
A l'occasion de d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attrivue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition...) ?

Exercice 24:
Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association "Bureau des arts". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y-a-t-il de bureaux possibles ? Il y a 24 élèves dans la classe.

Exercice 25:
Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1. Combien de résultat peut-on obtenir ?
2. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

5 Variables aléatoires

Exercice 26:
Un vendeur vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque semaine choisie au hasard parmi les 52 semaines d'une année, associe le nombre de voitures vendues cette semaine. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Voitures vendues	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,26$	$0,25$		$0,15$	$0,05$

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine
2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$
4. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. En dduire une estimation du nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).

Exercice 27:
Un sac contient un jeton marqué "2" et un jeton marqué "3". On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage. On définit alors la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le produit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience puis l'ensemble E des valeurs prises par X.
2. Décrire l'événement $\{X = 3\}$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire l'événement $\{X < 8\}$ et calculer sa probabilité.

Exercice 28:
Une urne contient deux jetons noirs et huit jetons blancs. On tire au hasard successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. Chaque jeton blanc rapport 2 euros et chaque jeton nopir fait perdre 1 euro. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme algébrique obtenue à la fin des deux tirages.
   (a) Décrire l'événement $\{X = 1\}$ et calculer sa probabilité.
   (b) Décrire l'événement $\{X < 4\}$ et calculer sa probabilité.

Exercice 29:
Un sondage effectué auprès de vacanciers révèle que 75% d'entre eux pratiquent la natation pendant leurs congés. On interroge succssivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Le nombre de vacanciers est suffisamment grand pour que le choix des personnes soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de vacanciers pratiquant la natation. Calculer les probabilités suivantes :

   (a) $\mathbb{P}(X = 4)$ | (b) $\mathbb{P}(X = 0)$ | (c) $\mathbb{P}(X = 2)$ | (d) $\mathbb{P}(X < 4)$

Exercice 30:
Lors d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie aux 250 spectateurs.
Parmi les 250 billets distribués, 5 donnent droit à quatre places gratuites, 15 donnent droit à trois places gratuites, 60 donnent droit à une place gratuite et avec les autres billets on ne gagne rien.

1. On considère un spectateur qui a reçu un billet. Déterminer la probabilité des événements :
   (a) A : "Le spectateur ne gagne rien"
   (b) B : "Le spectateur gagne au moins deux places gratuites"
2. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées avec un billet.
   (a) Déterminer, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X
   (b) Calculer la probabilité de l'événement $(X \leq 2)$
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$
   (d) Combien faudrait-il de billets faisant gagner une place gratuite pour que $\mathbb{E}(X) = 1$?

6 Loi binomiale

Exercice 31:
On a réalisé une étude statistique sur les performances d'une joueuse de basket professionnelle. Lorsqu'elle joue à domicile, cette joueuse réussit 68% de ses tirs mais seulement 42% lorsqu'elle joue à l'extérieur.

1. Cette joueuse dispute un match à domicile et elle effectue deux tirs d'affilés indépendants l'un de l'autre.

(a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.
(b) Quelle est la probabilité que cette joueuse marque deux paniers ?
(c) Quelle est la probabilité que la jouesue marque au moins un panier ?

2. Cette joueuse dispute un match à l'extérieur et elle effectue trois tirs successifs indépendants les uns des autres.
   (a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.
   (b) Quelle est la probabilité que la joueuse ne marque aucun panier ?
   (c) Quelle est la probabilité que la joueuse marque au plus deux paniers ?

Exercice 32:
Soit $X \sim \mathcal{B}(6; 0,4)$, déterminer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 2)$
2. $\mathbb{P}(X = 0)$
3. $\mathbb{P}(X \leq 4)$
4. $\mathbb{P}(X \leq 6)$
5. $\mathbb{P}(X > 3)$
6. $\mathbb{P}(X \geq 5)$

Exercice 33:
Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard, cinq fois de suite avec remise. Le joueur gagne s'il tire une figure. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de gains.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$ à 10^{-4} près.
3. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois, à 10^{-4} près.

Exercice 34:
Dans une usine, on utilise cinq machines identiques. La probabilité que l'une d'entre elles tombe en panne dans une semaine est $0,01$. Les pannes étant inépendantes les unes des autres, déterminer la probabilité des événements suivants à 10^{-5} près.

1. A : "il s'est produit exactement une panne au cours de la semaine".
2. B : "il s'est produit exactement deux pannes au cours de la semaine".
3. C : "il ne s'est produit aucune panne au cours de la semaine".
4. D : "il s'est produit au moins une panne au cours de la semaine".

Exercice 35:
Un petit artisan emploie trois ouvriers, la probabilité pour que l'un d'entre eux soit absent un jour donné est $0,05$. On suppose que les trois ouvriers s'absentent indépendamment les uns des autres. Soit X la variable aléatoire qui à une journée associe le nombre d'ouviers absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la table des valeurs de X.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins un ouvrier présent.

Exercice 36:
A l'épreuve de tir à l'arc, à une distance de 50 m, un tireur touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7.

1. Quelle est la probabilité pour que sur 5 tirs, il touche au moins une fois le centre de la cible ?
2. Combien de tirs doit-il effectuer pour que la probabilité qu'il touche au moins une fois le centre de la cible soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 37:
Un constructeur de composants électroniques fabrique des diodes. La probabilité pour qu'une diode soit défectueuse est 0,005. On prélève au hasard un lot de 10 diodes dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 diodes.
Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité d'avoir dans un lot de 10 diodes :

1. exactement une diode défectueuse.
2. exactement deux diodes défectueuses.
3. au moins deux diodes défectueuses.
4. au plus deux diodes défectueuses.

Exercice 38:
On a observé que 2% des ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation. On suppose que les pannes de tels ordinateurs sont indépendantes. On note X la variable aléatoire associant le nombre de pannées prévisibles à chaque parc de 150 ordinateurs (on assimilera le choix des 150 machines à un tirage avec remsie).

1. Déterminer la loi de probabilité de X et ses paramètres.
2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité des événements suivants :
   (a) "Le nombre mensuel de pannes est 5".
   (b) "Le nombre mensuel de pannes est au moins égal à 2"

7 Loi de Poisson

Exercice 39:
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout intervalle de temps d'une durée de 30 secondes, associe le nombre de skieurs se présentant à une remontée mécanique, entre 14 heures et 15 heures. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.

1. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 6)$ à 10^{-4} près.

2. Calculer la probabilité que, pendant un intervalle de temps d'une durée de 30 secondes pris au hasard entre 14h et 15h, il se présente au plus 6 skieurs. Arrondir au millième.

Exercice 40:
Un lycée achète son papier pour photocopieur à une entreprise. On admet que la probabilité qu'une feuille du papier livré, prise au hasard, bloque le photocopieur est $p = 0,001$.
Une documentation de 12 pages est photocopiée en 50 exemplaires. On appelle K la variable aléatoire qui, à toute série de 600 photocopies, associe le nombre de blocages pendant la reprographie. On assimilera une série de 600 photocopies à un prélèvement de 600 feuilles de papier au hasard et avec remsie.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par K ?

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

   (a) Au cours de ce travail, le photocopieur ne se bloque jamais.

   (b) Au cours de ce travail, le photocopieur se bloque exactement trois fois

3. On admet que la loi de probabilité suivie par K peut-être approchée par une loi de Poisson.

   (a) Préciser son paramètre.

   (b) Quelle est la probabilité que le photocopieur se bloque plus de deux fois pendant ce travail ?

Exercice 41:
Dans un lot de tiges métalliques, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges. On considère la variable aléatoire Y qui,n à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.

4. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

5. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{P}(Z = 2)$ puis $\mathbb{P}(Z \leq 2)$.

Exercice 42:
On note E l'événement "une bouteille prélevée au hasard dans un stock important est conforme au cahier des charges". On suppose que la probabilité de E est $0,02$.
On prélève ay hasard 30 bouteilles dans le stock pour vérification. On suppose que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de 30 bouteilles, associe le nombre de bouteilles non conformes.

1. (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

2. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

   (a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

   (b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. En utilisant cette variable aléatoire, calculer la probabilité que dans un tel prélèvement de 30 bouteilles, au plus une bouteille soit non conforme.

8 Problèmes

Problème 1:
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. Une entreprise fabrique un certain type d'article électroméngaer.
On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts :

- un défaut de soudure, noté défaut a.
- un défaut sur un composant électronique, noté défaut b.

Partie A
On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.

- A est l'événement "l'article présente le défaut a".
- B est l'événement 'l'article présente le défaut b".

On admet que $\mathbb{P}(A) = 0,03$ et $\mathbb{P}(B) = 0,02$ et on suppose que A et B sont indépendants. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. E_1 : "l'article présente le défaut a et le défaut b".
2. E_2 : "l'article présente au moins un des deux défauts".
3. E_3 : "l'article ne présente aucun défaut".
4. E_4 : "l'article présente un seul des deux défauts".

Partie B
Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25. On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remsie de 25 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux. On suppose que la probabilité de l'événement D : "l'article est défectueux" est 0,05.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.

Problème 2:
Les données utilisateur sont transmises par trames de 53 octets. Dans une connexion, on prélève une trame au hasard. La connexion est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage au hasard et avec remise de 53 octets parmi l'ensemble des octets transmis lors de la connexion.
On suppose que la probabilité qu'un octet prélevé au hasard dans la connexion contienne une erreur est $0,03$. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 53 octets ainsi défini, associe le nombre d'octets contenant une erreur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun octet ne contienne une erreur.
3. Calculer la probabilité, dans un tel prélèvement, au plus trois octets contiennent une erreur.
4. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson. Justifier que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 1,59$.
5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y \leq 3)$.

Problème 3:

Partie A
Un garagiste a acheté 70% de son stock de pneus à un premier fournisseur et 30% à un deuxième fournisseur. Il observe que :

- 5% des pneus provenant du premier fournisseur ont un défaut.
- 10% des pneus provenant dy deuxième fournisseur ont un défaut.

On prélève au hasard un pneu dans le stock. Tous les pneus ont la même probabilité d'être prélevés. On considère les événements suivants :

- F : "le pneu provient du premier fournisseur".
- G : "le pneu provient du deuxième fournisseur".
- D ; "le pneu a un défaut".

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}_F(D)$ et $\mathbb{P}_G(D)$.
2. (a) Calculer les valeurs exactes des probabilités $\mathbb{P}(F \cap D)$ et $\mathbb{P}(G \cap D)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(D) = 0,065$.
3. Calculer la probabilité que le pneu provienne du deuxième fournisseur sachant que le pneu choisi à un défaut.

Partie B
Le garagiste choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. On rappelle que la probabilité pour qu'un pneu prélevé au hasard ait un défaut est $0,065$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait de défaut.
3. Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut.