1 Nombres complexes : forme algébrique

1.1 Compétences Attendues

- Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué d'un nombre complexe.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + 8i$
2. $z_2 = -2 + 3i$
3. $z_3 = 7$
4. $z_4 = 5i$
5. $z_5 = 2i + 1$
6. $z_6 = 2 + i\sqrt{2}$

Exercice 2:
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2 - 3i$
2. $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $z_3 = 4$
4. $z_4 = -5i$
5. $z_5 = \dfrac{5+8i}{2}$
6. $z_6 = \dfrac{-2+3i}{-2}$

Exercice 3:
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La partie imaginaire de $2 + 5i$ est $5i$. $z = 2i$ est un imaginaire pur.
2. La partie imaginaire de 4 est $4i$.

Exercice 4:
Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes $z_1 = (a - b) + ib$ et $z_2 = 2a - 1 - (3 - b)i$.

Exercice 5:
Déterminer le nombre réel a tel que $2a + 5i = 4 + 5i$.

Exercice 6:
Déterminer les réels a et b tels que : $(a + 2) + 3i = -4 + (5 + 3b)i$.

Exercice 7:
Déterminer les réels a et b tels que : $(-5a + 5) + (3b - 3)i = 5 + 6i$.

Exercice 8:

1. Déterminer les valeurs de i^n pour $n = 0, 1, ..., 7$.
2. Conjecturer les valeurs possibles de i^n en fonction des valeurs de n.
3. On souhaite calculer i^{2025}. En remarquant que $2025 = 4 \times 506 + 1$, justifier que $i^{2025} = i$.
4. En vous inspirant de la question précédente, calculer i^{3135}.

Exercice 9:
Calculer :

1. $(2 + 3i) + 3(5 - i)$
2. $4(3 + 2i) - 3(2 + 5i)$
3. $(1 - 5i)(2 + 4i)$
4. $(2 - 3i)(4 - 3i)$

Exercice 10:
Calculer et simplifier :

1. $(2i)^2$
2. $(-2i)^2$
3. $-3i^2$
4. $(\sqrt{2}i)^2$
5. $(-\sqrt{2}i)^2$
6. $(-3\sqrt{2}i)^2$

Exercice 11:
Calculer :

1. $(1 + 3i)^2$
2. $(1 - 2i)^2$
3. $(1 + 5i)(1 - 5i)$
4. $(2 + 5i)^2$
5. $(3i + 2)^2$
6. $(4i + 1)(1 - 4i)$

Exercice 12:
Soient $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ et $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$. Calculer :

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1 - z_3$
3. z_2^2
4. $2z_1 - 3z_2$
5. $z_1 \times z_3$
6. z_1^3

Exercice 13:
Dans chaque cas, déterminer le conjugué du nombre complexe z :

1. $z = 3i - 2$
2. $z = i$
3. $z = 5 - 4i$
4. $z = -1 - 3i$

Exercice 14:
Soit $z = 1 + 3i$. Calculer :

1. $z + \overline{z}$
2. $z - \overline{z}$
3. $z \times \overline{z}$

Exercice 15:
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{1-i}{1+i}$
2. $z_2 = \dfrac{3+2i}{2+2i}$
3. $z_3 = \dfrac{5}{1-i}$
4. $z_4 = \dfrac{3+i}{-2i+2}$
5. $z_5 = \dfrac{3i}{2+3i}$
6. $z_6 = i - \dfrac{1}{i}$

Exercice 16:
Déterminer le conjugué de chaque expression puis donner sa forme algébrique :

1. $z_1 = (2+3i)+(4-2i)$
2. $z_2 = -4i - (3-5i)$
3. $z_3 = 3i(3-5i)$
4. $z_4 = (1+2i)(1-2i)$
5. $z_5 = \dfrac{2i}{1+i}$
6. $z_6 = \dfrac{2+3i}{1-i}$

Exercice 17:
Soit $z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que z_1 est racine du polynôme $P(z) = z^2 + z + 1$.

Exercice 18:
Le nombre complexe $z_2 = -2 + 3i$ est-il solution de l'équation $3 + 2i - iz = 0$?

Exercice 19:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $z^2 = -16$
   (b) $z^2 = -5$
   (c) $z^2 = -1$
   (d) $z^2 = -18$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivants :
   (a) $(z-3i)^2 = -16$
   (b) $(z+2)^2 = -5$
   (c) $(z+i)^2 = -1$
   (d) $(z+4i\sqrt{2})^2 = -18$

Exercice 20:
Soit $f : z :\mapsto z^2 + 6z + 12$ définie sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z+3)^2 + 3$.
2. Résoudre $f(z) = 0$

Exercice 21:
Soit $f : z \mapsto 2z(1-z)$ définie sur $\mathbb{C}$.

1. Calculer l'image de $z_1 = 1 + 2i$ par f.
2. Déterminer les antécédents de 0 par f.
3. Résoudre l'équation $f(z) = z$.
4. Déterminer les nombres complexes ayant une image réelle par f.

Exercice 22:
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

1. $2z + 5 + 3i = 2 - 4i$
2. $(2+i)z - 3 = 2 + 4i$
3. $(2+3i)(z-3i) = 5i$
4. $\dfrac{z-4i}{z-3i} = 2 + 5i$
5. $\dfrac{z+4}{z-i} = 4i$

Exercice 23:
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$
3. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$
4. $\dfrac{z}{1-i} = -1 + 3i$
5. $(3+2i)(z-1) = i$

Rappels de physique

On désigne l'impédance d'une résistance par $Z_R = R$, celle d'un condensateur par $Z_C = \dfrac{1}{j \times 2\pi f C}$ et celle d'une bobine par $Z_L = j \times 2\pi f L$.

- L'impédance totale d'un système en série est la somme des impédances des dipôles: $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$.
- L'inverse de l'impédance totale d'un système en parallèle est la somme des inverses des impédances des dipôles : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \ldots$.

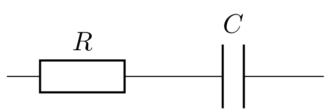
Exercice 24:

Un circuit électrique RL est un circuit électrique contenant une résistance et une bobine montées ici en série. Il est utilisé dans diverses applications comme dans des convertisseurs de courant continue.

Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit avec $R = 1\ \Omega$, $L = 0,142$ H et $f = 13,5$ Hz.

Exercice 25:

Un circuit RC est un circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur montés ici en série. Ces circuits RC permettent de réaliser des filtres électroniques passe-bas qui laissent passer les basses fréquences et qui atténuent les hautes fréquences.



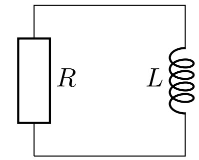
Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit, avec $Z = Z_R + Z_C$, $R = 1\ \Omega$, $C = 0,001$ F et $f = 13,5$ Hz.

Exercice 26:

On considère deux dipôles Z_1 et Z_2 en parallèle. On donne $Z_1 = -1,5 + 2j$ et $Z_2 = 3 - 4j$. Donner la forme algébrique de l'impédance Z de l'ensemble.

Exercice 27:

On considère un circuit composé d'une résistance et d'une bobine, montés ici, en parallèle. Ce circuit et composé d'une résistance de 2 Ω et d'une bobine de $0,0001$ H montés en parallèle et raccordés sur un générateur dont la fréquence f vaut 15 000 Hz. Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe Z du circuit.



Exercice 28:

On considère un circuit composé d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine, montés ici, en parallèle. Les circuits RLC sont généralement utilisés pour réaliser des filtres de fréquence. Un circuit est composé d'une résistance de 1 500 Ω, d'un condensateur de $0,00056$ F et d'une bobine de $0,000125$ H montés en parallèle et raccordés sur un générateur dont la fréquence vaut 1 800 Hz. Calculer la forme algébrique de l'impédance complexe du circuit.