Sujet 1

Cours :
Enoncer et démontrer le théorème de Heine.

Exercice 1 :
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que :
   $$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \sum \frac{u_n}{2^{n+1}} \quad \text{converge}$$
   (c) On pose :
   $$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$
   Prouver que f est continue sur E.

Exercice 2 :
On note E l'espace des suites bornées de premier terme nul et on considère pour tout u de E, $N(u) = \sup_{n\geq 1} |u_{n+1} - u_n|$.
Montrer que N est une norme sur E et la comparer à la norme infinie. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 :
Montrer qu'une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge.

Exercice 4 :
Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$$U_{\varepsilon,n} = \quad \{f \in \mathcal{C}, \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, \\ |f(y) - f(x)| > n|y-x|\}$$
Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\ ,\ \|\cdot\|_\infty)$.

Sujet 2

Cours :
Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Exercice 1 :
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose :
$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \ \text{ et } \ N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes de E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 :
Montrer que $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et en dessiner la boule unité.

Exercice 3 :
Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 4 :
On note X l'espace des suites réelles convergentes et $Y = c_0(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la norme $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
On définit l'application $L : X \to Y$ de la façon suivante: pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = L(x)$ est la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = \lim x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim x_n$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que L est linéaire et continue. Déterminer $\|L\|$.
2. Montrer que L est bijective et que L^{-1} est continue.

Sujet 3

Cours :
Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

Exercice 1 :

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par : $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.
   Soit $u : \begin{cases} E & \to & E \\ f & \mapsto & u(f) = g \end{cases}$
   avec $\forall x \in [0,1],\ g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   On admet que u est un endomorphisme de E.
   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   On pourra considérer $f_n(t) = ne^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet non nul fixé et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{cases}$
   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$ où
   $$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$
   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continue pour la norme choisie. Justifier.

Exercice 2 :
Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, l'application :
$$N : P \mapsto \sup_{0\leq t\leq 1} |P(t) - P'(t)|$$
est-elle une norme ?

Exercice 5 :
Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

1. $A = \{\text{suites croissantes}\}$
2. $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$
3. $C = \{\text{suites périodiques}\}$

Exercice 5 :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
   Démontrer que, pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p,\ n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln(n)),\ n \geq 1\}$ est dense dans $[-1; 1]$.

Exercice 3 :
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est compact si et seulement si toute fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$, puis de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Vérifier que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f|$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne dans les deux cas.
2. Montrer que la forme linéaire T sur $\mathcal{C}$ définie par $T(f) = \int_0^1 tf(t)dt$ est continue pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. Calculer $\|T\|$ dans ces deux cas.