1 Préambule

Le calcul d'une intégrale définie de la forme :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

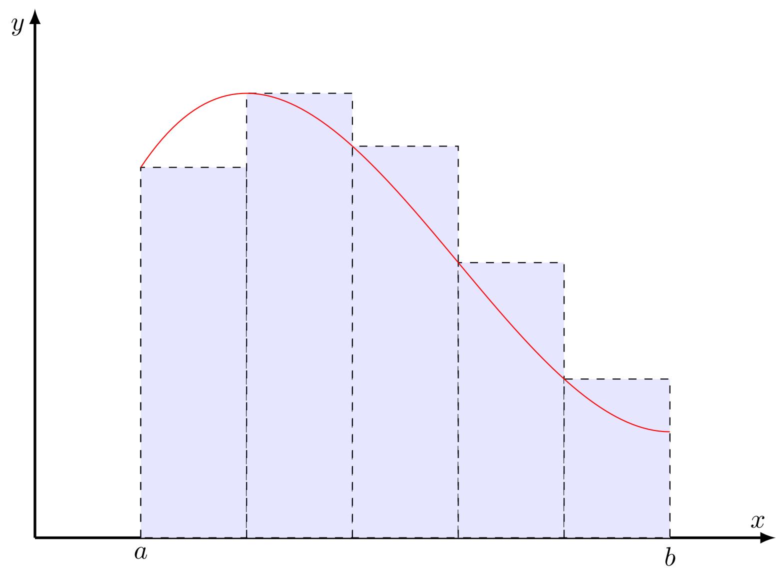
où f est une fonction continue sur $[a, b]$ est un problème classique intervenant dansde nombreux domaines, qu'ils soient scientifiques ou non.
Cette évaluation peut cependant s'avérer difficile voire impossible en pratique car il n'est pas toujours possible de déterminer une primitive de la fonction f, même en utilisant les techniques de changement de variable ou d'intégration par parties.
Nous allons nous intéresser à certaines méthodes de quadrature qui consistent à approcher la valeur de l'intégrale par une somme pondérée finie de valeurs de la fonction f en des points choisis.

On considèrera donc une subdivision de pas régulier $\dfrac{1}{n}$ de l'intervalle $[a, b]$.

2 Méthode des rectangles

Cette méthode consiste à approcher $I(f)$ par:

$$\boxed{I_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) \qquad \text{avec} \qquad x_k = a + \frac{b-a}{n}k}$$



On a donc :

```
def rectangle(f,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    x,s=a,0
    for k inrange(n):
        s+=f(x)
        x+=h
    return h* s
```

Théorème :
La méthode des rectangles est d'ordre 0 et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors on a :

$$|I(f) - I_1(f)| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2}$$

Démonstration :

- Si f est un polynôme constant, on a que $I(f) = I_1(f)$ d'où la méthode d'ordre 0.
- Par ailleurs on a :

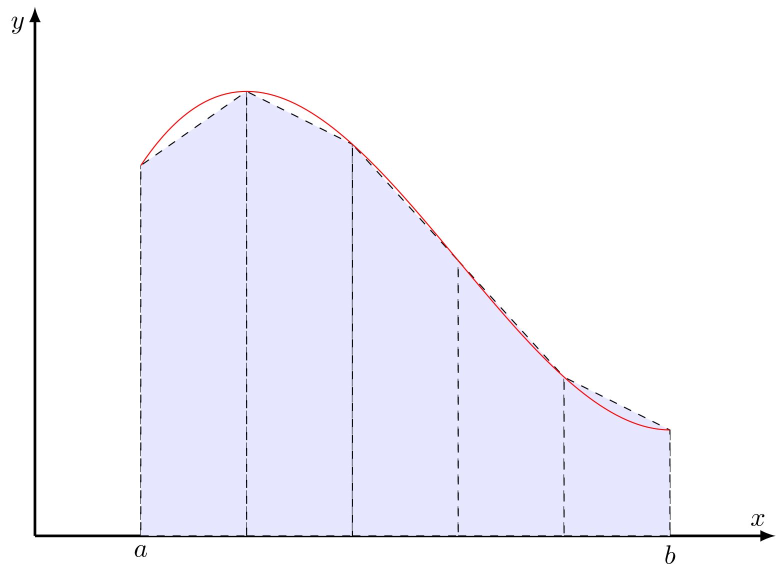
$$\begin{aligned} |I(f) - I_1(f)| &= \left| \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a) \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - f(a)|dt \\ &\leq \int_a^b |f'(c)||t-a|dt \quad \text{D'après Rolle} \\ &\leq M_1 \int_a^b (t-a)dt \end{aligned} \tag{1}$$

D'où le résultat.

3 Méthode des trapèzes

Cette méthode consiste à approcher $I(f)$ par:

$$\boxed{I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \qquad \text{avec} \qquad x_k = a + \frac{b-a}{n} k}$$



On a donc :

```python
def trapeze(f,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    x,s=a+h,(f(a)+f(b))/2
    for k in range(n-1):
        s+=f(x)
        x+=h
    return h* s
```

Théorème :
La méthode des rectangles est d'ordre 1 et si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors on a :

$$|I(f) - I_1(f)| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}$$

Démonstration :

- Si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, on a que $I(f) = I_1(f) = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ d'où la méthode d'ordre 0.
- Par ailleurs on a :

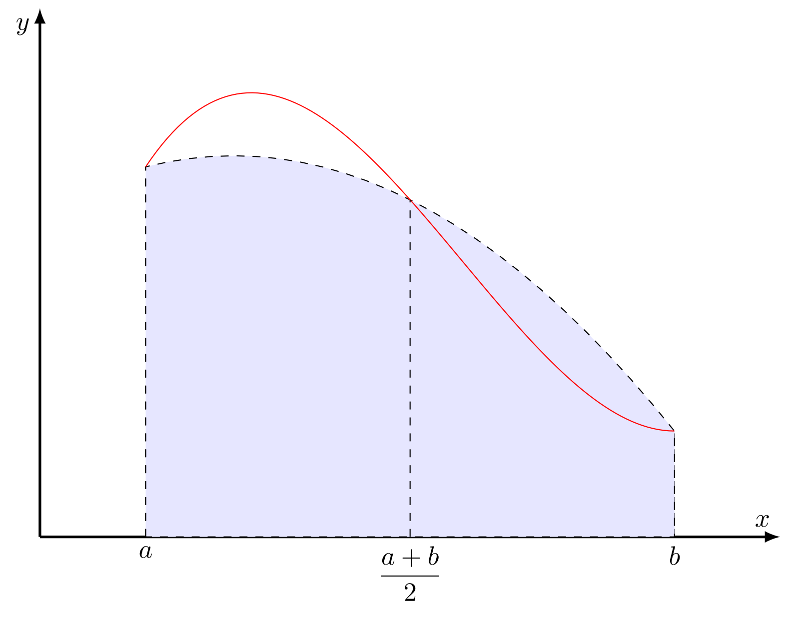
$$\begin{aligned}
|I(f) - I_1(f)| &= \left| \int_a^b f(t)dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \\
&\leq \int_a^b \left| f(t) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right| dt \\
&\leq \int_a^b |f''(c)| \frac{|t-a||b-t|}{2} dt \quad \text{D'après Rolle x 2} \\
&\leq M_2 \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt
\end{aligned} \tag{2}$$

D'où le résultat.

4 Méthode de Simpson

Cette méthode consiste à approcher $I(f)$ par:

$$\boxed{I_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{6}\right) \quad \text{avec} \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k}$$



On a donc :

```python
def simpson(f,a,b,n):
    h=(b a)/n
    x,s1=a+h,0
    for k in range(n-1):
        s1+=f(x)
        x+=h
    x,s2=a+h/2,0
    for k in range(n):
        s2+=f(x)
        x+=h
    return h* (s1/3+ 2 * s2/3+(f(a)+f(b))/6)
```

Théorème :
La méthode des rectangles est d'ordre 3 et si f est de classe $\mathcal{C}^4$ alors on a :

$$|I(f) - I_3(f)| \leq M_3 \frac{(b-a)^5}{2880}$$

5 Le module `scipy.integrate`

Le module `scipy.integrate` contient une fonction nommée `quad` qui permet le calcul approché d'une intégrale.
Cette fonction, très efficace, utilise différentes routines de manière à obtenir la meilleure approximation possible.
Dans son utilisation la plus simple, cette fonction prend trois paramètres : f, a et b et renvoie un tuple (I, e) où I est une valeur approchée de l'intégrale $I(f)$ et e une estimation de l'erreur.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

>>> quad(lambda x: np.sin(x), 0, np.pi)
(2.0, 2.220446049250313e 14)

>>> quad(lambda x: np.exp(-x*x), np.inf, np.inf)
(1.7724538509055159, 1.4202636780944923e 08)
```