Chapitre 2 : Fonction exponentielle

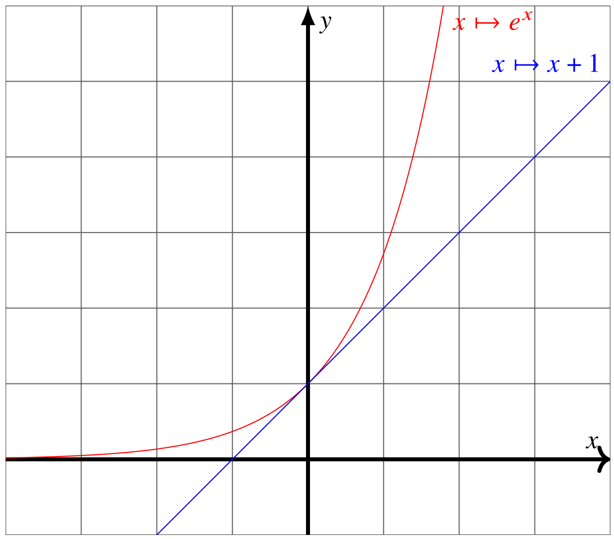
Table des matières

Contenu

- Nombre e et fonction $x \mapsto e^x$.
- Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$.
- Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel.
- Courbe représentative.
- Limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- Croissance comparée en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^n}$ pour n entier.

1 Définition et caractérisation

Propriété:
Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.



Définition:
Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, notée exp, définie par $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à $2,718$.

Remarque

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

2 Etude de la fonction exponentielle

2.1 Dérivation

Propriété:
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto e^x)' = x \mapsto e^x$.

Exercice:
Pour $x \in \mathbb{R}$, dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto xe^x$
- $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$
- $h : x \mapsto \dfrac{2x+1}{e^x}$

2.2 Limites aux bornes

Propriété:
On a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

2.3 Variations

Propriété:
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Relation fonctionnelle

Propriété:
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice:
Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \dfrac{e^{-3}}{e^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (e^{3x})^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Propriété:
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice:
Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = e^6$
- $e^x < e^{-2}$
- $e^{x^2} - e^{-2} = 0$
- $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$

4 Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

4.1 Dérivation

Propriété:
La fonction $x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto e^{kx})' = x \mapsto ke^{kx}$ avec k un réel quelconque.

Exercice:
Soit la fonction $f : x \mapsto xe^{-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Etudier les variations de f.

4.2 Limites aux bornes

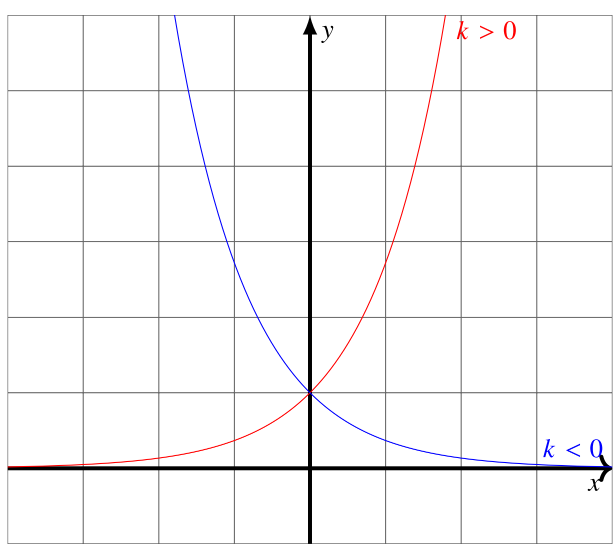
Propriété:
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{si} \ \ k > 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{si} \ \ k < 0$$

4.3 Variations

Propriété:

- Si $k > 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.



Exercice:
Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

1. Montrer que la fonction $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
2. On suppose que $f(0) = 50\ 000$. Calculer A.
3. Etudier les variations de f sur $[0; 10]$.

5 Croissances comparées

Propriété:

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour n entier.

! Remarque

La propriété précédente signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus lente que $x \mapsto e^x$.

6 Exercice bilan

Soit $f : t \mapsto -14e^{-\frac{1}{90}t} + 21$.

1. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(t)$, etablir son tableau de signe puis le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{90} f(t)dt$.