Chapitre 4 : Fonction logarithme

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

Logarithme népérien

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme népérien de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a:

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Remarque

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- On notera $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguités.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas :
- *(Hors programme)* L'unicité du logarithme népérien découle de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Logarithme népérien

Propriété :

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Exemple:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

Définition

Définition:

On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Remarque

Dans le tronc commun, nous avons étudier la fonction logarithme décimal qui a un lien très étroit avec la fonction logarithme népérien. En effet, on a pour tout réel x strictement positif :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété:

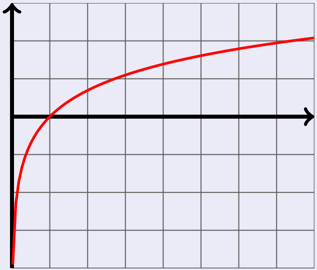
La fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice:

Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$.

Propriété:

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



Relations fonctionnelles

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Corollaire:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$
- $B = \ln(32) - 7\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

Propriété:

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $\ln(x) = 6$
- $\ln(x^4) < 3\ln(x^2)$
- $\ln(x^2) - \ln(2) = 0$
- $\ln(1 + 5x) - 6 < 0$

Croissances comparées

Théorème: *Croissances comparées*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Remarque

Le théorème précédent signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus rapide que $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice bilan

1. Résoudre l'équation $148 - 10\ln(x) = 136 - 7,5\ln(x)$.
2. Simplifier l'expression $3\ln(2x) - \ln(8)$.
3. Résoudre l'équation $480e^{-\frac{1}{95}t} + 20 = 280$.