

Chapitre 5 : Composition de fonctions

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition
2. Dérivation de fonctions composées
 - 2.1 Cas particuliers
 - 2.2 Cas général
3. Primitivation de fonctions composées
4. Exercice bilan

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Définition:

On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Exemple:

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-3}$. C'est la composée de deux fonctions u et v :

$$f : x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \sqrt{x-3}$$

On a $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et donc f :

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x-3) = \sqrt{x-3}$$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Identifier la composition de deux fonctions dans la fonction f .

Exercice:

Soient $u : x \mapsto x^2 + x$ et $v : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Déterminer l'expression des fonctions $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

	Fonction f	Dérivée f'
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1} \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } I = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ sur } I = \mathbb{R}^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x \text{ sur } \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$

Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Dérivée
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu' u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 1 - \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ définie sur \mathbb{R} . Etablir le tableau de variations de f .

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Propriété:

On a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

.

Exercice:

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $g : x \mapsto \left(\frac{3x + 2}{x - 3}\right)^3$
- $h : x \mapsto \frac{x^2 - 6}{2x + 5}$

Primitivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif des primitives des fonctions usuelles :

	Fonction f	Primitive F
Constante	$f(x) = a, a \in \mathbb{R} \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A \cos(\omega x + \phi) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega x + \phi) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Primitive
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b)$ où F est une primitive de f .
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$u' e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Exercice :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$
- $g : x \mapsto xe^{x^2}$
- $h : x \mapsto \cos(2x) - 3\sin(3x - 1)$

1. Définition
2. Dérivation de fonctions composées
 - 2.1 Cas particuliers
 - 2.2 Cas général
3. Primitivation de fonctions composées
4. Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto (2x - 6)(x^2 - 6x + 7)^{17}$ une fonction définie sur \mathbb{R} .

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2. Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.