Chapitre 4 : Nombres complexes (forme trigonométrique)

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

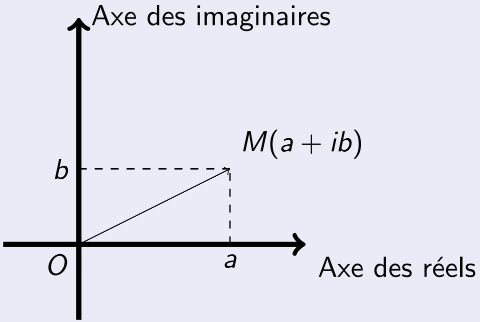
Représentation graphique d'un nombre complexe

Définition:

Le plan complexe est la plan où l'axe des abscisses est l'axe réel et l'axe des ordonnées est l'axe imaginaire. A un nombre complexe $z = a + ib$ on associe :

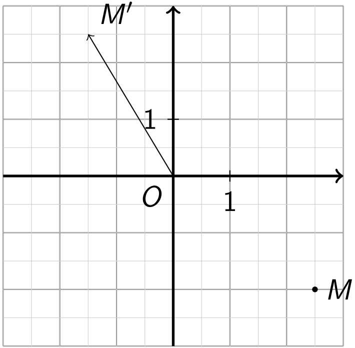
- Un point image $M(a; b)$
- Un vecteur image $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On dira que z est l'affixe de M et de $\overrightarrow{OM}$.



Exercice:

Donner l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ ci-dessous puis placer le point M'' d'affixe $z = -2 - i$:



Représentation graphique d'un nombre complexe

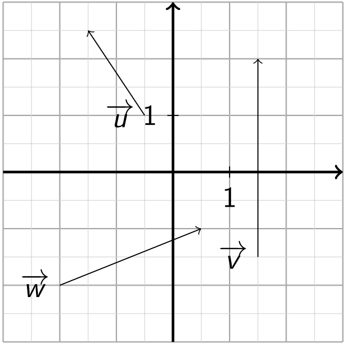
Propriété:

Soit A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B.

- Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Exercice:

Déterminer l'affixe des vecteurs ci-dessous :

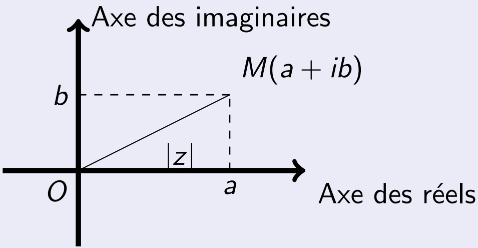


Exercice:

Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + 2i$ et B le point d'affixe $z_B = -3 + i$. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$ puis l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition:

Soit M le point d'affixe $z = a + ib$. On appelle module de z, noté $|z|$, le nombre $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Module d'un nombre complexe

Exemple:

- $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$
- $|-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$

Remarque

- Le module d'un nombre complexe est toujours un nombre positif.
- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

Module d'un nombre complexe

Propriété:

Soient A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B. On a $AB = |z_B - z_A|$.

Propriété:

Soient z, z' deux nombres complexes. On a :

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

Exercice:

Calculer le module des nombres complexes suivant :

- $2 + 3i$
- $7i$
- $-3i(4 - 3i)$
- $\dfrac{1 + i}{2 - 3i}$

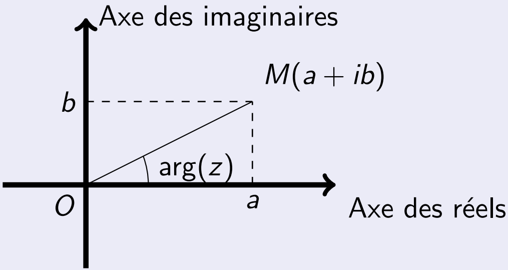
Argument d'un nombre complexe

Définition:

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, un argument de z est un nombre réel, noté $\arg(z)$ ou θ, tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Si $M(a; b)$ est un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$, $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque

Le nombre complexe nul est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument. Les autres nombres complexes ont une infinité d'arguments, définis à un multiple de 2π près.

Argument d'un nombre complexe

Exemple:

- $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arg(-1) = \pi$
- $\arg(2) = 0$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul dont on note le module $|z|$ et un argument θ, une écriture trigonométrique de z est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Exercice bilan

1. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - i$.
2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Big)$