Chapitre 6 : Primitives

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

Notion de primitive

Définition:

Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Remarque

Il n'y a pas unicité d'une primitive.

Exemple:

Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 8$ est donné par $F : x \mapsto x^3 + x^2 + 8x$. En effet on a bien $F' = f$.

Notion de primitive

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Propriété:

Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I. Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k, k \in \mathbb{R}$.

Propriété:

Soit f une fonction admettant des primitives sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice:

Vérifier que $F : x \mapsto \dfrac{5}{2}x^2 + 3x - 2$ avec $F(1) = \dfrac{7}{2}$. est l'unique primitive de $f : x \mapsto 5x + 3$.

Primitives et fonctions de références

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	**Primitive** F
Constante	$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A\cos(\omega x+\phi)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega x + \phi) + k$ sur $I = \mathbb{R}$

Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I. $F+G$ est alors une primitive de $f+g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Exercice bilan

Exercice bilan

Déterminer la primitive des fonctions suivantes respectant la condition initiale.

1. $f : x \mapsto 23x^{24} - 11x^{12} + 1$ avec $f(1) = 8$.
2. $g : x \mapsto 5\sin\left(3x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right)$ avec $g(\pi) = 1$.