Chapitre 1 : Intégration

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

1. Intégrale d’une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d’aire
Aire d’une fonction positive
Aire d’une fonction négative
Aire d’une fonction quelconque : découpage d’aire

2. Propriétés de l’intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Définition:

On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du$$

Définition

Exercice:

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 x\ dx$.

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

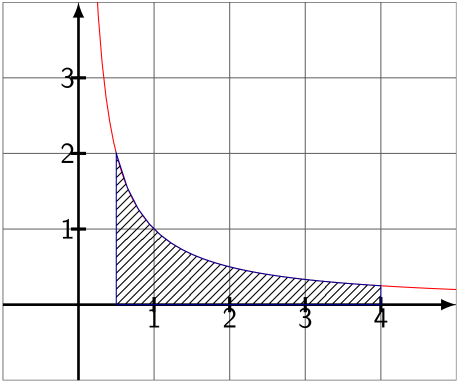
Aire d'une fonction positive

Définition:

Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

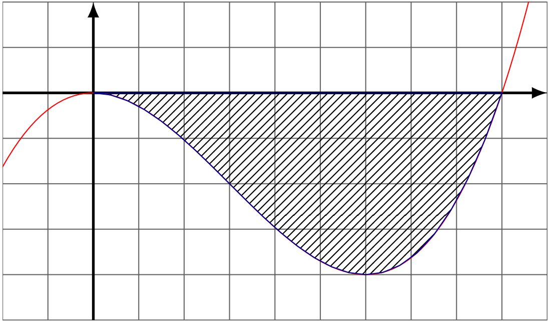
Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

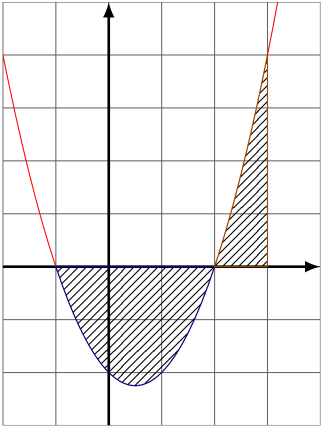
3. Exercice bilan

Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

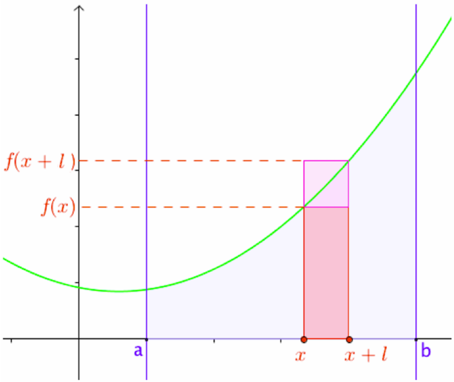
<u>Exercice:</u>

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a; b]$.
On partage l'intervalle $[a; b]$ en n sous intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x; x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimensions l et $f(x)$ d'aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimensions l et $f(x+l)$ d'aire $l \times f(x+l)$.



Méthode des rectangles

Sur l'intervalle $[a; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs". Voici un algorithme écrit en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

```python
def integrale(f,a,b,n):
    longueur = (b - a) / n
    aire_inf , aire_sup = 0 , 0
    for k in range (n):
        aire_inf = aire_inf + longueur *
                         f(a + k * longueur )
        aire_sup = aire_sup + longueur *
                         f(a + (k+1) * longueur )
    return aire_inf , aire_sup

aire_inf , aire_sup = integrale(lambda x: x*x ,0,1,100)
print("{}␣<␣integrale␣<␣{}".format(aire_inf,aire_sup))
```

1. Intégrale d'une fonction
   1.1 Définition
   1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
      Aire d'une fonction positive
      Aire d'une fonction négative
      Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
   2.1 Relation de Chasles
   2.2 Linéarité
   2.3 Inégalités
   2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Propriété: *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in [1;4] \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Proposition:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + xdx$.

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice:

Démontrer que $\displaystyle\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Valeur moyenne

Définition:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1; 0]$.

1. Intégrale d'une fonction
1.1 Définition
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire
Aire d'une fonction positive
Aire d'une fonction négative
Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

2. Propriétés de l'intégrale
2.1 Relation de Chasles
2.2 Linéarité
2.3 Inégalités
2.4 Valeur moyenne

3. Exercice bilan

Exercice bilan

Soit f définie pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ par $\begin{cases} \sin\left(4x+\dfrac{4\pi}{5}\right) & \text{si} \quad x \in [-\pi;0] \\ \cos(3x) & \text{si} \quad x \in]0;\pi] \end{cases}$

Calculer la valeur moyenne de f sur $[-\pi;\pi]$.