Chapitre 3 : Configurations géométriques

Axel Carpentier

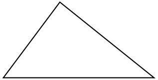
Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

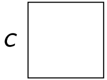
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Triangle:**



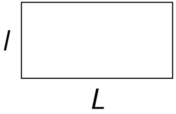
- Périmètre : $\mathcal{P}_{triangle}$ = somme des longueurs
- Aire : $\mathcal{A}_{triangle} = \dfrac{\text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}}{2}$

- **Carré:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{carré} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{carré} = c^2$

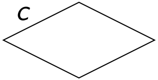
- **Rectangle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{rectangle} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l$

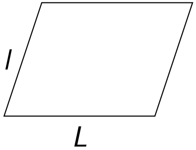
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Losange:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{losange} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{losange} = \dfrac{\text{Grande diagonale} \times \text{Petite diagonale}}{2}$

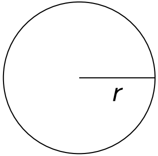
- **Parallélogramme:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{parallélogramme} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{parallélogramme} =$ Côté $\times$ Hauteur relative à ce côté

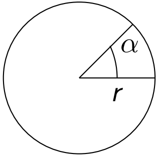
Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Cercle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{cercle} = 2 \times \pi \times r$
- Aire : $\mathcal{A}_{cercle} = \pi \times r^2$

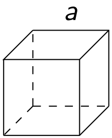
- **Arc de cercle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{arc} = \alpha \times r$ pour α en radians
- Aire : $\mathcal{A}_{arc} = \dfrac{\alpha \times r^2}{2}$ pour α en radians

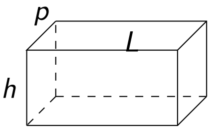
Formules usuelles de calcul de volumes

- **Cube:**



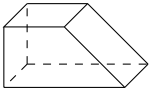
- Volume : $\mathcal{V}_{cube} = a^3$

- **Pavé droit:**



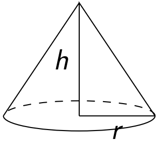
- Volume : $\mathcal{V}_{pavé} = L \times h \times p$

- **Prisme droit:**



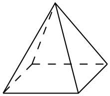
- Volume :
  $\mathcal{V}_{prisme} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$

- **Cône:**



- Volume : $\mathcal{V}_{cône} = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

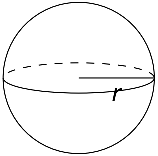
- **Pyramide:**



- Volume :
  $\mathcal{V}_{pyramide} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

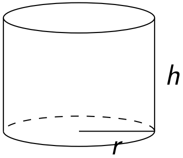
Formules usuelles de calcul de volumes

- **Boule:**



- Volume : $\mathcal{V}_{boule} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

- **Cylindre:**



- Volume : $\mathcal{V}_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$

Formules usuelles de calcul de volume

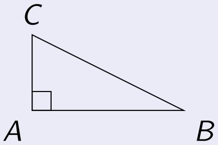
Exercice:

1. Calculer l'aire d'une sphère de rayon 5cm.
2. Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6cm, on place les points I, J et K, milieux respectifs de $[EF]$, $[FG]$ et $[BF]$. Calculer le volume exact du tétraèdre $FIJK$.
3. Calculer le volume d'une boule de rayon 3cm.
4. Calculer le volume d'un cylindre de rayon 5cm et de hauteur 4cm.

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Sens direct:** Dans un triangle ABC rectangle en A comme suit : On considère un triangle rectangle en A :

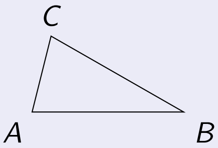


On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Contraposée:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :

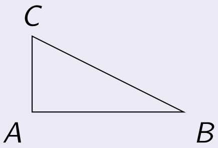


Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Théorème de Pythagore

Théorème:

- **Réciproque:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :



Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est pas rectangle en A.

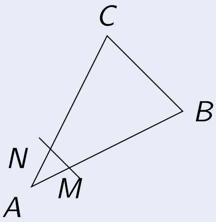
Exercice:

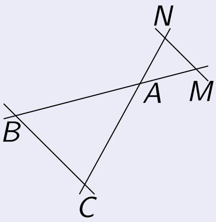
1. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AC = 5$ et $AB = 2$. Calculer BC.
2. Le triangle ABC tel que $AC = 7$, $AB = 6$ et $BC = 3$ est-il rectangle ? Si oui, en quel point ?

Théorème:

- **Sens direct:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si $(MN)//(BC)$, alors :

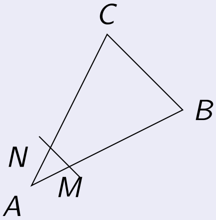
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

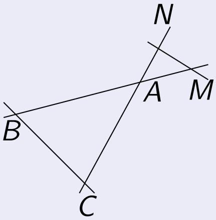




Théorème:

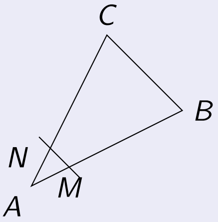
- **Contraposée:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si les deux premiers quotients de l'égalité ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

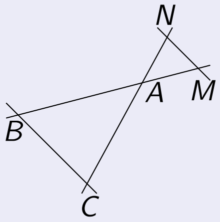




Théorème

- **Réciproque:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si les deux premiers quotients de l'égalité sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



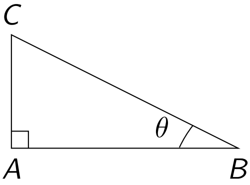


Exercice:

1. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A. On suppose que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AM = 4$, $AN = 3$, $AB = 1$ et $BC = 5$. Calculer les longueurs AC et MN.
2. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A. On suppose que $MN = 3$, $AB = 12$, $BC = 6$, $AB = 4$. Les droites (BM) et (CN) sont-elles parallèles ?

Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, les trois relations trigonométriques relient les cosinus, sinus et tangente d'un angle du triangle, aux côtés du triangle.



- $\cos(\theta) = \dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$

Exercice:

Soit un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

1. Déterminer la valeur exacte puis approchée à $10^{-1\circ}$ de l'angle $\theta = \widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur exacte puis approchée à 10^{-1} de BC.

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

On a alors :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Exercice:

1. Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{C} = 50^\circ$. Calculer $\hat{A}$ à $10^{-2\circ}$ près.
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 7,8$, $BC = 6,9$ et $\hat{B} = 51^\circ$. Calculer $\hat{C}$ à $10^{-2\circ}$ près.

Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\left\{\begin{array}{ccc} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{array}\right.$

Alors : $\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 & = & c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{array}\right.$

Exercice:

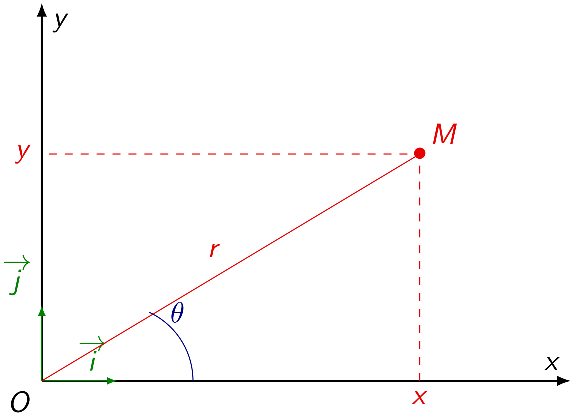
Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{A} = 113,63°$.

1. Montrer que $AB \simeq 11,08$
2. En déduire la valeur approchée à $10^{-2°}$ près de la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$.

Repérage d'un point dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
- **Les coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\ )$



Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y)$, on peut déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées polaires d'un point $(r; \theta)$, on peut déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

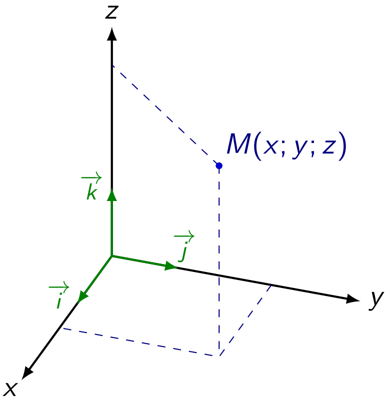
<u>Exercice:</u>

1. On considère le point $A(3; 3)$ dans le plan. Déterminer ses coordonnées polaires $(r_A; \theta_A)$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $C\left(3; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Repérage d'un point dans l'espace

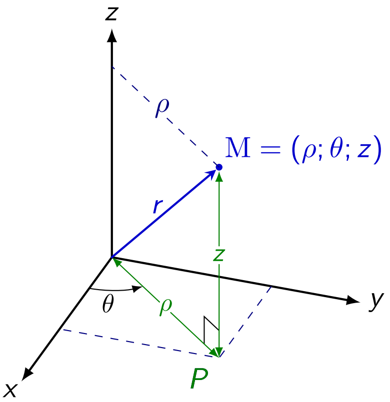
Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.



Repérage d'un point dans l'espace

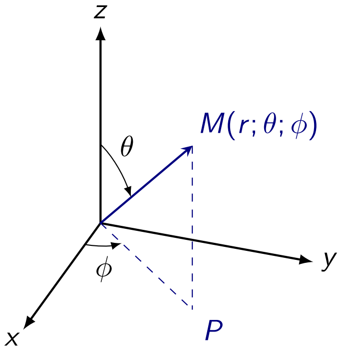
- **Les coordonnées cylindriques** $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OP})$.



On a alors $\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases}$

Repérage d'un point dans l'espace

- **Les coordonnées sphériques** $(r;\theta;\phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OP}) \in [0;2\pi[$ et la latitude $\phi = (\overrightarrow{OP}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors $\begin{cases} x = & \rho\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = & \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = & \rho\cos(\theta) \end{cases}$

Repérage d'un point dans l'espace

Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\sin(\phi) = \frac{z}{r}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice:
On considère le point $A(0; 2\sqrt{3}; -2)$ dans l'espace. Déterminer ses coordonnées sphériques $(r_A; \theta_A; \phi_A)$.