Chapitre 6 : Calcul intégral

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

Définitions

Définition:

Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Remarque

Il n'y a pas unicité d'une primitive.

Exemple:

- Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 8$ est donné par $F : x \mapsto x^3 + x^2 + 8x$. En effet on a bien $F' = f$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de f.

Définitions

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Propriété:

Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I. Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k, k \in \mathbb{R}$.

Propriété:

Soit f une fonction admettant des primitives sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice:

Vérifier que $F : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + 3x - 2$ avec $F(1) = \frac{7}{2}$. est l'unique primitive de $f : x \mapsto 5x + 3$.

Primitives de fonctions usuelles

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	**Primitive** F
Constante	$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
Puissance inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n > 1$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

Opérations sur les primitives

Propriété:

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I. $F+G$ est alors une primitive de $f+g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Opérations sur les primitives

Exemple:

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{3}{x}$ est donnée par $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 3\ln(x)$

Exercice:

Déterminer la primitive F de $f(x) = x^3 + \cos(x)$ avec $f(\pi) = 0$.

Opérations sur les primitives

Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable de dérivée u' et $v : J \mapsto K$

Fonction f	**Primitive** F
$f = u'u$	$F = \dfrac{u^2}{2}$
$f = u'u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$ si $J \subset \mathbb{R}_+^*$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = u' \cos(u)$	$F = \sin(u)$
$f = u' \sin(u)$	$F = -\cos(u)$
$f = u' \times (v' \circ u)$	$F = v \circ u$

Exercice:

Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Définition:

On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du$$

Définition

<u>Exercice:</u>

Calculer l'intégrale $\int_2^3 x \, dx$.

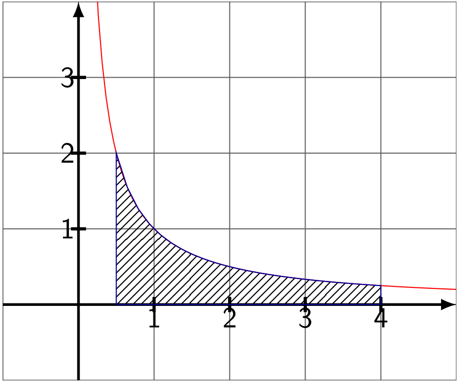
Aire d'une fonction positive

Définition:

Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



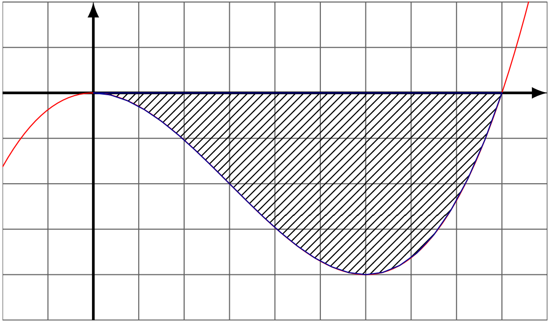
Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ \ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.

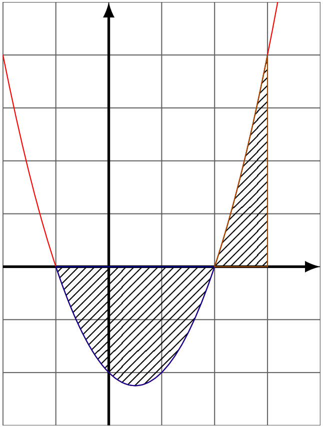


Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

<u>Exercice:</u>

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



Propriété: *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in [1;4] \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

Linéarité

Proposition:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + xdx$.

Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice:

Démontrer que $\displaystyle\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

Valeur moyenne

Définition:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1; 0]$.

Intégration par partie

Propriété:

Soit u, v deux fonctions dérivables de dérivées continues sur $[a; b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$$

Intégration par partie

Exemple:

On désire calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x \, dx$.

- On pose $u'(x) = e^x v(x) = x$ d'où $u(x) = e^x v'(x) = 1$.
- Donc : $\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1e^1 - 0 \; e^0) - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

Changement de variable du type $x \to x + \beta$

Propriété:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle du type $[a+\beta, b+\beta]$ où a, b et $\beta \in$ avec $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x+\beta)\ dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(t)\ dt$$

Exemple:

On se propose de calculer l'intégrale $\quad I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} (x+3)^2 \, dx.$

- On peut faire le calcul directement en remarquant qu'une primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3\ ,-2\ ]$ est $\dfrac{1}{3}(x+3)^3$.
- On peut également effectuer une translation de manière à effectuer un calcul plus simple :

$$I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2 \, dx = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Méthode d'intégration

Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

Propriété:

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[\ \alpha a\ ,\ \alpha b\ ]$, où $\alpha \neq 0$, alors

$$\int_a^b f(\alpha x)\ dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\ dx$$

Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

Exemple:

On se propose de calculer $I = \int_0^1 e^{2x}\, dx$:

- $I = \int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\, dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$

Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

Propriété:

Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle $I = [\ a\ ,\ b\ ]$ dont la dérivée est dérivable sur I.
Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f\left[\varphi(t)\right] \varphi'(t)\ dt.$$

Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

Exemple:

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en posant $t=\sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x=t^2=\varphi(t)$:

- On calcule les nouvelles bornes d'intégration :
  Pour $x \in [\ 1\ ,\ 4\ ]$, on obtient $t \in [\ 1\ ,\ 2\ ]$
- On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable : on a
  $$\frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx = \frac{1}{\varphi(t)+\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\ dt = \frac{1}{t^2+t} \times 2t\ dt.$$
- Donc : $$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} &= \int_1^2 \frac{2t\ dt}{t^2+t} \\ &= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\ dt \\ &= 2\left[\ \ln(1+t)\ \right]_1^2 \\ &= 2(\ln 3 - \ln 2) \\ &= 2\ln\left(\tfrac{3}{2}\right).\end{aligned}$$