Chapitre 2 : Suites numériques

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Tronc commun

Table des matières

Suites arithmétiques

Définition:

Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel quelconque. r s'appelle la raison de la suite (u_n).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$ et $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$.
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$ et $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

Remarque importante

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Suites arithmétiques

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

Suites arithmétiques

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} = \text{Nombre de terme} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} = \frac{5n(n+1)}{2}$.
- Pour (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7-1,5n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=3}^{n} v_k = (n-2)\frac{v_3+v_n}{2} = (n-2)\frac{9,5-1,5n}{2}$.

Suites géométriques

1. Suites arithmétiques
2. Suites géométriques
3. Exercice bilan

Suites géométriques

Définition:

Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ où q est un réel quelconque strictement positif. q s'appelle la raison de la suite (u_n).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$ et $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc $v_1 = q \times v_0 = 0,5 \times 200 = 100$ et $v_2 = q \times v_1 = 0,5 \times 100 = 50$.

Remarque importante

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Suites géométriques

Propriété:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Suites géométriques

Propriété:

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

Suites géométriques

Propriété:

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
On a alors

$$\sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$, on a
  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = -3(1-2^{n+1})$.
- Pour (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$, on a
  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=3}^{n} v_k = v_3 \dfrac{1-q^{n-2}}{1-q} = 50(1-0,5^{n-2})$.

Exercice bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 25$.
   1.1 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   1.2 En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   1.3 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{14} u_k$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 30$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   2.1 Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   2.2 En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   2.3 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} v_k$.