1 Dérivation

1.1 Compétences Attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = (-5) - 5x$
2. $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{7}$
3. $k(x) = -3x^2 - 8x + 4$
4. $l(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$

Exercice 2:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $m(x) = -5{,}6x^2 - 1{,}5x - 5$
2. $o(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$
3. $p(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8x}{9} + \dfrac{1}{3}$
4. $q(x) = 4{,}5x^3 - 3{,}4x^2 + 7$

Exercice 3:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = 7{,}1x^2 + 5{,}5x$
2. $g(x) = 4{,}8x^2 - 6{,}1$
3. $h(x) = 9{,}2x^2 - 5{,}6x^3$
4. $l(x) = 8{,}8x^3 + 8{,}1x^2$

Exercice 4:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = -5(5x + 7)x^2$
2. $g(x) = 9(6x - 5)x^2$
3. $h(x) = (9x + 8)x^2$
4. $h(x) = (4x + 1)(-2x + 1)$

Exercice 5:
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse a, c'est-à-dire le nombre dérivé $f'(a)$.

1. $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$
   $a = 1$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}x + 2$
   $a = 3$
3. $h(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2$
   $a = 3$
4. $i(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
   $a = -2$

Exercice 6:
Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Calculer $f(1)$ puis $f'(1)$.
3. En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 7:
Déterminer dans chacun des cas suivants une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2 + 2x$ et $a = 3$.
2. $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$ et $a = 2$.
3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 1$ et $a = -1$.

Exercice 8:
Une trottinette roule en ligne droite. La distance (exprimée en mètres) parcourue par cette trottinette en fonction du temps t (exprimé en heures) est donnée par la fonction $d(t) = 1,5t^2 + 10t + 1$.

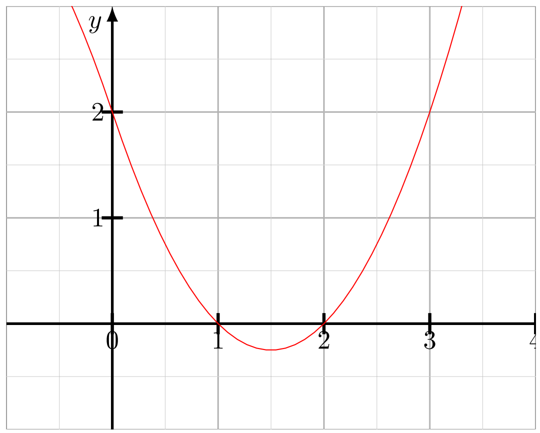
1. Exprimer la vitesse instantanée de la trottinette en fonction du temps en heures.
2. Calculer la vitesse instantanée de la trotinettes au bout de 5 secondes.

Exercice 9:
La courbe $\mathcal{C}$ de la figure est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 8]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Résoudre graphiquement dans $[-1; 8]$ les équations et inéquations suivantes:
   (a) $f'(x) = 0$
   (b) $f'(x) < 0$
   (c) $f'(x) > 0$
2. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 8]$

3. Utiliser les indications de la figure pour résoudre dans $[-1;8]$ l'équation $f(x)=0$

4. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1;8]$



Exercice 10:
f est une fonction définie sur $[0;3]$. Son tableau de variation sur $[0;3]$ est :

x	0	2	3
$f(x)$	0 ↗	$\frac{16}{3}$	↘ 3

1. f est dérivable sur $[0;3]$. On admet que $f'(2)=0$ et que f' ne s'annule que en 2. Donner le tableau de signe de f'

2. Tracer une courbe représentative possible de f dans un repère orthonormé

Exercice 11:
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty;15]$? sur l'intervalle $[15;+\infty[$?

Exercice 12:
Soit f une fonction dérivable sur $[0;9]$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0		2		5		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;9]$.

Exercice 13:
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f(x)=x^2-4x+1$.

1. Justifier que, pour tout réel x, $f'(x)=2x-4$

2. Recopier et compléter le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	0		$\cdots$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

3. Quel est le minimum de f sur $[0;3]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 14:
Soit $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x)=(x-2)(2x+3)$.

3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

4. En déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 15:
Soit $f : x \mapsto -4x^3 - 10x^2 + 8x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x)=-4(3x-1)(x+2)$.

3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

4. En déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 16:
Soit $f : x \mapsto x^3 + 5x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 17:
Soit f la fonction définie sur $[-2; 4]$ par $f : x \mapsto -\dfrac{x^3}{3} + x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Etudier dans un tableau le signe de f' sur $[-2; 4]$
   (b) Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

   (c) Dresser le tableau de variation de f sur $[-2; 4]$
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3
3. Construire T et $\mathcal{C}$
4. Déterminer une équation de T

Exercice 18:
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 2,5]$.
On donne la courbe représentative de la fonction f, notée $\mathcal{C}$, dans un repère orthogonal.

La courbe $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes:

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; 5,5)$
- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $B(2; 2)$
- La tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$ est horizontale
- La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $T(0; 8,5$

1. (a) Reproduire la figure
   (b) Placer les points A ; B et T et tracer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ en A et en B.
   (c) Déterminer $f(1)$; $f(2)$ et $f'(1)$
   (d) Donner par lecture graphique une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 3$
   (e) Justifier que $f'(2) = 0$. Donner par lecture graphique une valeur approchée de la deuxième solution de l'équation $f'(x) = 0$
2. La fonction f dont on connaît la courbe $\mathcal{C}$ est définie sur l'intervalle $[0; 2,5]$ par :

$$f : x \mapsto 4x^3 - 16,5x^2 + 18x$$

   (a) Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$						

   (b) i. Calculer f'
   ii. Vérifier $f'(x) = (12x - 24)(x - 0,75)$
   iii. Donner le signe de f' à l'aide d'un tableau de signes
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f
   (d) Déterminer les extremums de la fonction f

Exercice 19:
Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner un forme idéale pour réaliser des enrobages.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 12,5]$ par :

$$f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18$$

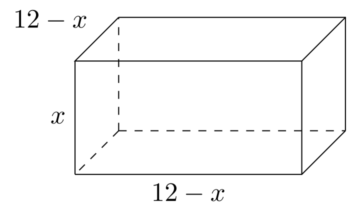
Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degré Celsius) du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout t de l'intervalle $[0; 12,5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = 0,42(t - 4)(t - 11)$.

2. Construire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12,5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

Exercice 20:

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un rangement ayant la forme d'un pavé droit selon le plan ci-dessous. Les longueurs sont en décimètres et la hauteur x du rangement est comprise entre 0 et 12 décimètres.



1. Justifier que le volume (en dm^3) du rangement est donné par la fonction f définie l'intervalle $[0; 12]$ par :
$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$$
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0; 12]$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0; 12]$:
$$f'(x) = 3(x - 4)(x - 12)$$
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 12]$ et en déduire les variations de f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle le rangement a un volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Exercice 21:
Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de truffe. On désigne par $B(x)$ le bénéfice hébdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0; 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B'(x)$ pour $x \in [0; 45]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0; 45]$:
$$B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$$
3. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0; 45]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B.
4. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

Exercice 22:
Le service d'urgence d'un hôpital reçoit un patient infecté par une bactérie très virulente. On administre à ce patient un puissant antibiotique. On considère que la fonction f permet de modéliser, en fonction du temps, le nombre de bactéries (en centaines), présentes dans le prélèvement sanguin effectué sur le patient à l'instant t (en heures). Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 190$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in [0; 12]$.
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 12]$:
$$f'(t) = -3(t + 1)(t - 7)$$
3. Etudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer le maximum de f sur l'intervalle $[0; 12]$ et préciser en quelle valeur de t il est atteint. Interpréter ce résultat.
5. La vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant t est donnée par $f'(t)$. Déterminer la vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant $t = 10$.

Exercice 23:
Julia utilise un lance-pierre pour faire tomber des boites de conserves. Les boîtes se trouvent au sol à une distance de $L = 50m$ de Julia qui se trouve à une hauteur $h = 1,5m$.
En l'absence de frottement, les équations de Newton pour l'études mouvements s'écrivent :
$$x(t) = v_{0x}t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h$$
Avec :

- $x(t)$ l'abscisse du projectile en fonction du temps ;
- $y(t)$ l'ordonnée du projectile en fonction du temps ;
- $v_{0x} = 20m/s$ la composante horizontale de la vitesse initiale ;
- v_{0y} la composante verticale de la vitesse initiale ;
- $g = 10m/s^2$ la constante de gravitation.

On souhaite connaître la valeur de v_{0y} pour que Julia atteigne les boîtes.

1. Calculer $x'(t)$.
2. Montrer que $t = \frac{x}{20}$ et en déduire que :

$$y(x) = -0,0125x^2 + \frac{v_{0y}}{20}x + 1,5$$

3. Calculer $y(0)$.
4. Faire un schéma représentant la situation.
5. Calculer $y'(x)$ puis $v_0 = y'(0)$.
6. Montrer que $y(x) = -0,0125x^2 + v_0 x + 1,5$.
7. Pour que la pierre atteigne les boîtes il faut que la parabole coupe l'axe des abscisses à $x = 50$. En déduire la valeur de v_{0y}.

Exercice 24:

Partie A :
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 120x + 50$$

On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

1. Calculer $f(4)$ et $f(10)$.
2. (a) Déterminer, pour tout $x \in [0; 15]$, une expression de $f'(x)$.
   (b) Vérifier que, pour tout $x \in [0; 15]$, on a :

$$f'(x) = (3x - 2)(x - 10)$$

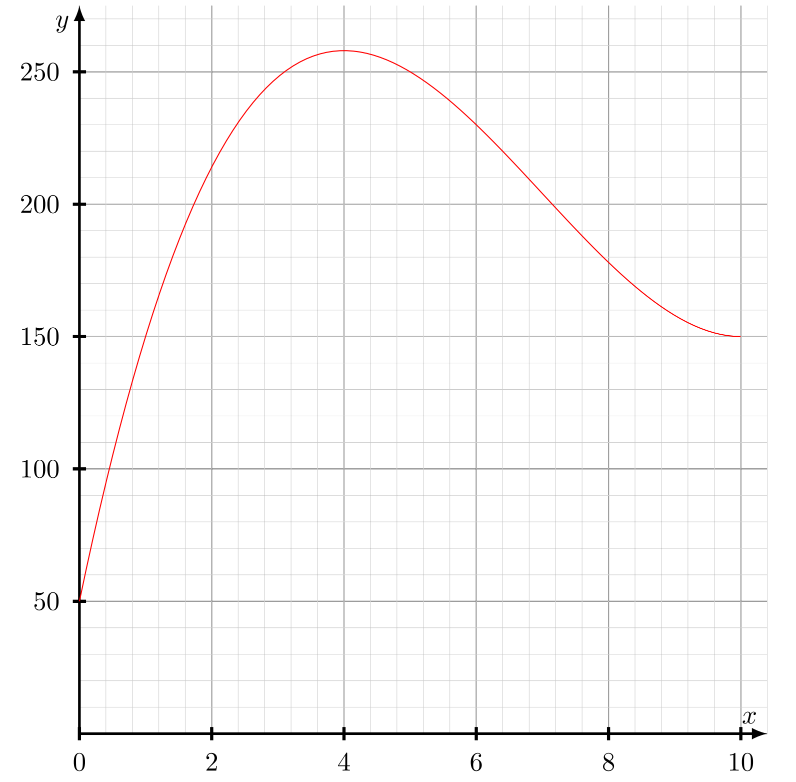
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 15]$. On pourra s'appuyer dans un tableau de signe.
4. En déduire les variations de la fonction f sur $[0; 15]$.

Partie B :
Des analyses ont montré que des microalgues étaient naturellement présentes dans l'eau de mer avec une concentration normale comprise entre 0 et 100 milligrammes par litre (mg/L).

Ces microalgues ont tendance à se multiplier lorsque la salinité de l'eau de mer diminue.

Les autorités sanitaires considèrent qu'elles deviennent dangereuses pour la santé lorsque leur concentration dépasse 200 mg/L. Il faut alors prendre des mesures comme l'interdiction à la baignade.

La courbe donnée ci-dessous modélise l'évolution de la concentration en microalgues de l'eau de baignade d'une plage du littoral pendant les dix jours qui ont suivi un très fort orage. Il s'agit de la courbe de la fonction f définie dans la ***Partie A*** mais dont l'ensemble de définition est, dans cette ***Partie B***, restreint à l'intervalle $[0; 10]$.



1. Pendant combien de jours complets la baignade est-elle interdite ?
2. Quelle est la concentration maximale en microalgues durant les dix jours suivant l'orage ? Au bout de combien de jours a-t-elle été atteinte ?
3. Peut-on considérer que dix jours après l'orage, la situation est revenue à la normale ?