Cours :
Montrer que la convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   (b) Etudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Exercice 2 :

1. On s'intéresse à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$
   (a) Quel est son domaine de définition ? On note f la somme et D le domaine.
   (b) La convergence est-elle uniforme sur D ? Normale ? Que peut-on en déduire pour f ?
   (c) Exprimer $\int_0^1 f(x)dx$ comme somme d'une série numérique.
2. Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Cours :
Montrer que la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme.

Exercice 1 :

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 :

Pour $x > 0$, on pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que h est bien définie et qu'elle est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de $h(x)$ lorsque x vers $+\infty$.
3. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée comme une série de fonctions.

Exercice 3 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha}{n^2+1} x e^{-nx}$$

1. Déterminer le domaine de définition de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Cours :
Montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément vers f sur X, alors f est continue sur X.

Exercice 1 :
On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 2 :
Soit $a \in> 0$, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+an}$$

Exercice 3 :
Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
Ecrire $\left(I_p + \frac{1}{n}M\right)^n$ sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(n)$.
En déduire que :

$$\left(I_p + \frac{1}{n}M\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(M)$$

Exercice 4 :
Soit $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $t \to s(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On considère alors l'application S définie par :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

S s'appelle la transformée de Laplace de s.
On suppose que $s(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$:

$$pS(p) = \int_0^p e^{-u} s\left(\frac{u}{p}\right) du$$

En déduire un équivalent de S quand p tend vers 0.

Exercice 3 :

Soient $a > 1$ et $b > 0$. On considère $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(b^k x)}{a^k}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue.
2. Donner une condition simple sur a et b qui assure que f est dérivable.
3. On va montrer que pour a et $\frac{b}{a}$ assez grands, f n'est dérivable en aucun point. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose la somme en trois termes.

$$\begin{aligned} f(x) &= h_n(x) + k_n(x) + \ell_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(b^k x)}{a^k} + \frac{\sin(b^n x)}{a^n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin(b^k x)}{a^k} \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Montrer qu'il existe x_n tel que :

   $$|x - x_n| \leq \frac{2\pi}{b^n} \quad \text{et} \quad |\sin(b^n x) - \sin(b^n x_n)| \geq 1$$

   (b) Montrer que :

   $$|\ell_n(x) - \ell_n(x_n)| \leq \frac{2a^{-n}}{a-1}$$

   (c) En utilisant que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$, démontrer que :

   $$|h_n(x) - h_n(x_n)| \leq \frac{2\pi a^{-n}}{\frac{b}{a} - 1}$$

   (d) En déduire que si a et $\frac{b}{a}$ sont assez grands :

   $$|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{a^n}$$

   puis que le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$ diverge lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$?
4. On suppose que $\alpha \geq 2$.
   Montrer que
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \left(\frac{1}{n}\right)$$
   ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
   Qu'en conclure pour la convergence uniforme ?
5. Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 4 :

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 5 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{a_n}{n^\rho}\right| \leq M$.

On pose $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nz}$.

1. Montrer que f existe sur $P = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$.
2. Montrer que la série converge uniformément sur tout compact de P.
3. Montrer l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $y > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:
   $$|f(x + iy)| \leq \frac{C}{y^{1+\rho}}$$

Exercice 5 :

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ que l'on considère muni de son produit scalaire canonique $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Déterminer alors $\mathbb{R}[X]^\perp$.