1 Préambule

Nous allons ici présenter, de manière non exhaustive, quelques fonctionnalités sur l'outil Geogebra relatives aux fonctions.

Nous verrons ici comment étudier convenablement une fonction via l'utilisation du numérique.

2 Définir et représenter une fonction

Il existe différentes fonctionnalités intégrée dans Geogebra qui permettent de définir une fonction :

- `Fonction( Fonction , x initial , x final)` :
  Dessine le graphique de la restriction de f à l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$.
- `Fonction( Liste Nombres )` :
  Définit une fonction de la manière suivante :
  - Les deux premiers nombres déterminent le x minimum et le x maximum ;
  - Les autres nombres sont les y pour la fonction en respectant un découpage régulier de l'ensemble de définition.
- `FonctionDonnées( Liste Nombres , Liste Nombres)` :
  Crée une fonction à partir des points $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ où $\{x_1, \ldots, x_n\},\ \{y_1, \ldots, y_n\}$ sont les listes données.

Exemple:

- `Fonction(-3,3,0,1,2,3,4,5)` définit une fonction linéaire de coefficient directeur 1 sur l'intervalle $[-3; 3]$.
- `Fonction(`x^2`, -1, 1)` dessine l'arc de la parabole représentative d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- `FonctionDonnées(0, 1, 2, 4, 0, 1, 4, 16)` crée la fonction affine par morceaux dont la représentation graphique relie les points $(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4),\ (4, 16)$.

Si l'on ne cherche pas à restreindre une certaine fonction à un intervalle nous pourrons directement écrire, par exemple pour la fonction carrée :

$$\texttt{f(x)=x}^2$$

Il s'agira alors d'ajuster la fenêtre avant de bien visualiser la fonction.

3 Fonctions et lecture d'image, d'antécédents et résolution d'(in)équations

3.1 Lecture d'images

Il est souvent nécessaire de déterminer les images d'une fonction. Il y a deux manières de procéder :

- Tracer la représentation graphique de la fonction concernée et conclure par lecture graphique de manière classique en regardant l'axe des abscisses puis l'axe des ordonnées.
- Utiliser la fonctionnalité `f( Valeur )` qui affiche la valeur de la Fonction en la Valeur souhaité.

Exemple:
Si on a $f(x) = x^2 + x$, `f(5)` retourne 30.

3.2 Lecture d'antécédents et résolution d'équations

Il est souvent nécessaire de déterminer les antécédents d'une fonction. Il y a deux manières de procéder :

- Tracer la représentation graphique de la fonction concernée et conclure par lecture graphique de manière classique en regardant l'axe des ordonnées puis l'axe des abscisses.
- Utiliser la fonctionnalité `Solutions( Equation )` : Résout une équation (ou un ensemble d'équations) de la variable x et retourne une liste de toutes les solutions.

Exemple:
Si on a $f(x) = x^2 + x$, `Solutions( f(x)=0 )` retourne $\{-1, 0\}$.

Il est important de noter que la fonctionnalité `Solutions` permet également de résoudre des inéquations : ce qui facilite grandement l'étude du signe d'une fonction (d'un dérivée par exemple).

4 Fonctions et limites

Il est souvent nécessaire de déterminer la limite d'une fonction (en un point ou en $\pm\infty$). Il y a deux manières de procéder :

- Tracer la représentation graphique de la fonction concernée et conclure quant à l'éventuelle limite.
- Utiliser la fonctionnalité `Limite( Fonction , Valeur)` qui recherche la limite de la Fonction en la Valeur (éventuellement infini).

Exemple:
`Limite((x² + x)/ x², +∞)` retourne 1.

5 Fonctions et dérivation

5.1 Fonction dérivée

Il existe plusieurs fonctionnalités pour calculer la dérivée d'une fonction :

- `Dérivée( Fonction )` :
  Calcule la dérivée de la fonction par rapport à la variable principale.
- `Dérivée( Fonction , Nombre )` :
  Calcule la n-ième dérivée de la fonction par rapport à la variable principale, n ayant la valeur du Nombre.
- `Dérivée( Fonction , Variable)` :
  Calcule la dérivée de la fonction par rapport à la variable indiquée.

Exemple:

- `Dérivée(x³ + x² + x)` retourne $3x^2 + 2x + 1$.
- `Dérivée(x³ + x² + x, 2)` retourne $6x + 2$.
- `Dérivée(x³ y² + y² + xy, y)` retourne $2x^3y + 2y + 2x$. x a donc le statut de paramètre et non de variable.

5.2 Equation de la tangente

On rappelle que pour une fonction f dérivable de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par :

$$\boxed{T : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer l'expression de la tangente à une courbe en un point :

- `Tangente( Point A, Fonction f)` :
  Tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a))$.
- `Tangente( Abscisse a , Fonction f)` :
  Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Exemple:

- `Tangente((1, 0), x²)` retourne la droite d'équation $y = 2x - 1$.
- `Tangente(1, x²)` retourne la droite d'équation $y = 2x - 1$.

6 Fonctions et intégration

6.1 Primitive

Il existe plusieurs fonctionnalités pour calculer une primitive d'une fonction :

- `Intégrale( Fonction )` :
  Retourne une primitive de la fonction donnée et la représente.

- `Intégrale( Fonction , Variable)` :
  Calcule une primitive de la fonction par rapport à la variable indiquée.

Exemple:

- `Intégrale(x³)` retourne $0.25x^4$.
- `Intégrale(x³ + 3 x y, y)` retourne $x^3y + \frac{3}{2}xy^2$. x a donc le statut de paramètre et non de variable.

6.2 Intégrale

Il existe plusieurs fonctionnalités pour calculer une intégrale d'une fonction sur un intervalle :

- `Intégrale( Fonction , x initial , x final )` :
  Retourne l'intégrale de la fonction sur l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$ et dessine l'aire concernée.
- `NIntégrale( Fonction, x initial, x final)` :
  Recherche une valeur (approchée) numérique de l'intégrale $\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx$ et dessine l'aire concernée.
- `IntégraleDomaine( Fonction f , Fonction g, x min, x max)` :
  Recherche une valeur (approchée) numérique de l'intégrale $\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x)dx$ et dessine l'aire concernée.

7 Fonctions et développements limités

Afin de déterminer numériquement le développement limité d'une fonction, il est possible d'utiliser la fonctionnalité :

`PolynômeTaylor( Fonction f , Valeur a, Ordre n )`

Cette fonctionnalité calcule et affiche le développement de Taylor d'ordre n de la fonction f en $x = a$.

Exemple:
`PolynômeTaylor(x², 3, 1)` retourne $9 - 6(x - 3)$, polynôme de Taylor de x^2 en $x = 3$ d'ordre 1.