Cours :
Montrer que la convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.

Exercice 1 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)dt = 0.$$

1. Enoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.

   (a) Montrer que la suite de fonction $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ versd f^2.

   (b) Démontrer que :

   $$\int_0^1 f^2(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)dt$$

   (c) Calculer :

   $$\int_0^1 P_n(t)f(t)dt$$

3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice 2 :
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(1)=0$.
Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x^n f(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Cours :
Enoncer et démontrer le théorème d'intégration sur un segment pour une suite de fonctions.

Exercice 1 :
On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 2 :
On post :

$$f_n : t \longmapsto nt^2 e^{-nt}$$

Etudier la continuité en 0 de :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

Exercice 3 :
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 4 :
Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes, convergente de somme nulle.
On pose :

$$U_0 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad U_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left(\frac{\sin(nt)}{nt}\right)^2 \end{array}\right.$$

Cours :
Montrer que $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$ pour B application bilinéaire et, f et g fonctions à valeurs vectorielles dérivables.

Exercice 1 :
On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$$

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2 :

1. Etudier la série de fonction :

   $$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$$

2. Calculer la dérivée de sa somme.

3. En déduire la valeur de :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 3 :

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^n f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$$

2. Montrer que le résultat reste vrai si f est seulement continue par morceaux.

Exercice 4 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit le n-ième polynôme de Bernestein $B_n(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p(1-x)^{n-p}$$

Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Exercice 5 :
Montrer que la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

n'est pas dérivable en 0.

1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(t) \text{ existe et } \lim_{t\to 0} S(t) = 0$$

On admet le résultat suivant :

Lemme :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

- Si g existe et est positif pour tout réel x, alors f est convexe.
- Si g est nulle, alors f est affine.

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = 0$$

Montrer $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 :
On pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+1}}$$

1. Etudier le domaine de définition de f et sa continuité.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{e^t-1}dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt}$$

En déduire la limite de $xf(x)$ en 0.

Exercice 4 :
On pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-n^2 x}$$

1. Etudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de S.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent en 0 de $S(x)$.