Chapitre 1 : Trigonométrie

Table des matières

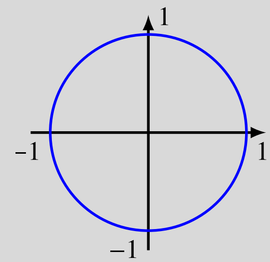
Contenu

- Cercle trigonométrique. Radian.
- Mesures d'un angle orienté, mesure principale.
- Fonctions circulaires sinus et cosinus : périodicité, variations, parité. Valeurs remarquables en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π.
- Fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$: amplitude, périodicité, phase à l'origine, courbes représentatives.

1 Cercle trigonométrique et radian

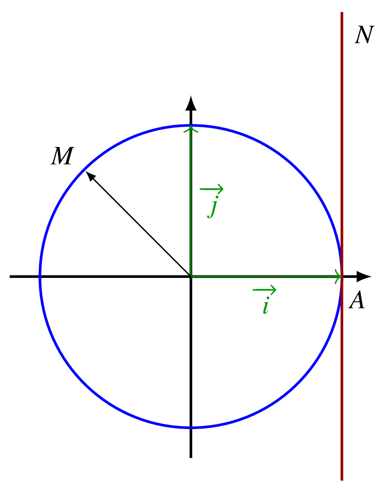
1.1 Le cercle trigonométrique

Définition:
Sur un cercle, on appelle sens trigonométrique (ou sens direct) le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



1.2 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orienté telle que $(A, \vec{j})$ soit un repère de la droite.
Si on "enroule" la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.



1.3 Le radian

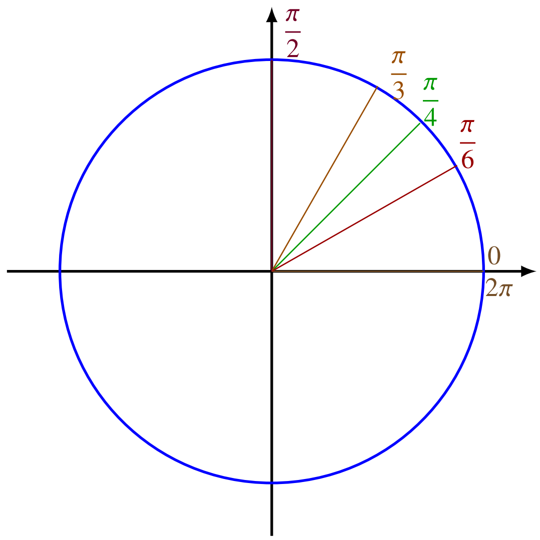
Propriété:
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π. On définit alors un nouvelle unité d'angle: le radian, défini tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Ainsi, à 2π radians (un tour complet), on peut faire correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes:

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

On représente par exemple ci-dessous des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique :



Exercice:

Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° puis donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

2 Mesure d'un angle orienté

2.1 Lire sur le cercle trigonométrique

Définition:

Une mesure, en radians, de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est la longueur de chemin parcouru pour aller de A à M dans le sens direct.

Propriété:

Si α est une mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un nombre entier relatif.

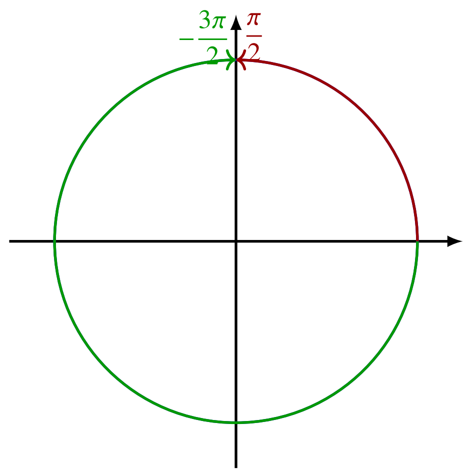
! Remarque

Le "k" détermine en fait un nombre de tours que l'on affectue sans le sens direct si k est positif, et dans le sens indirect si k est négatif.

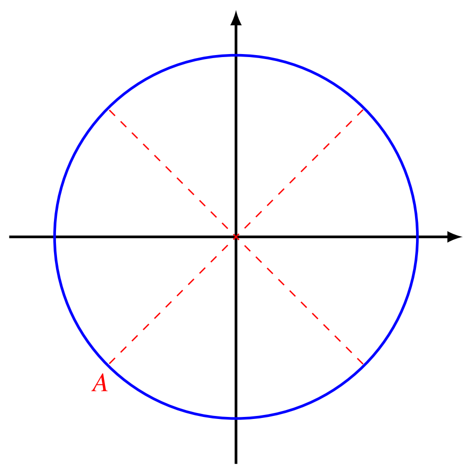
Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droite, soit 90°. Il est également possible de faire la lecture dans l'autre sens (sens indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$.

Les mesures $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.

Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.
On va donc avoir que $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ ainsi que $\frac{5\pi}{2}$ sont associées à un même point sur le cercle trigonométrique (sans pour autant que ces mesures soient égales !).



Exercice:
Lire sur le cercle trigonométrique l'angle associé au point A sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
Placer sur le cercle trigobométrique le point B associé à l'angle $\frac{9\pi}{4}$ et le point C associé à l'angle $-\frac{9\pi}{2}$.



2.2 Mesure pincipale d'un angle orienté

Nous avons vu qu'à un seul point on pouvait associer plusieurs valeurs d'angles. Nous allons en choisir une seule valeur que l'on va appeler le représentant.

Définition:
La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Exemple:

Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$. D'autres mesures sont données par exemple par :

$$\frac{7\pi}{4} - 2 = -\frac{\pi}{4} \ , \ \frac{7\pi}{4} - 4\pi = -\frac{9\pi}{4} \ , \ \frac{7\pi}{4} - 6\pi = -\frac{17\pi}{4} \ , \ \ldots$$

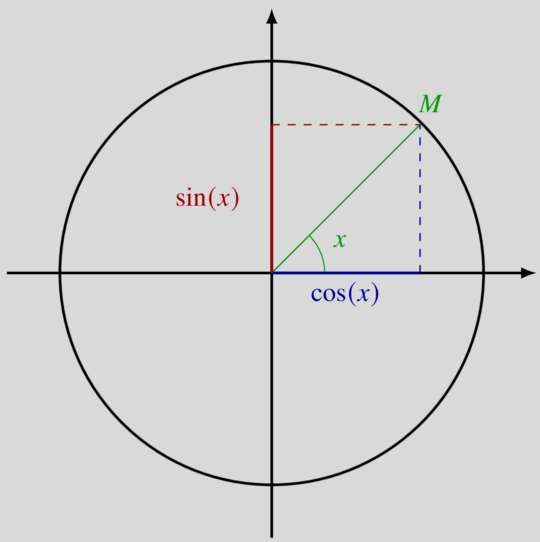
$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car c'est la seule comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exercice:

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

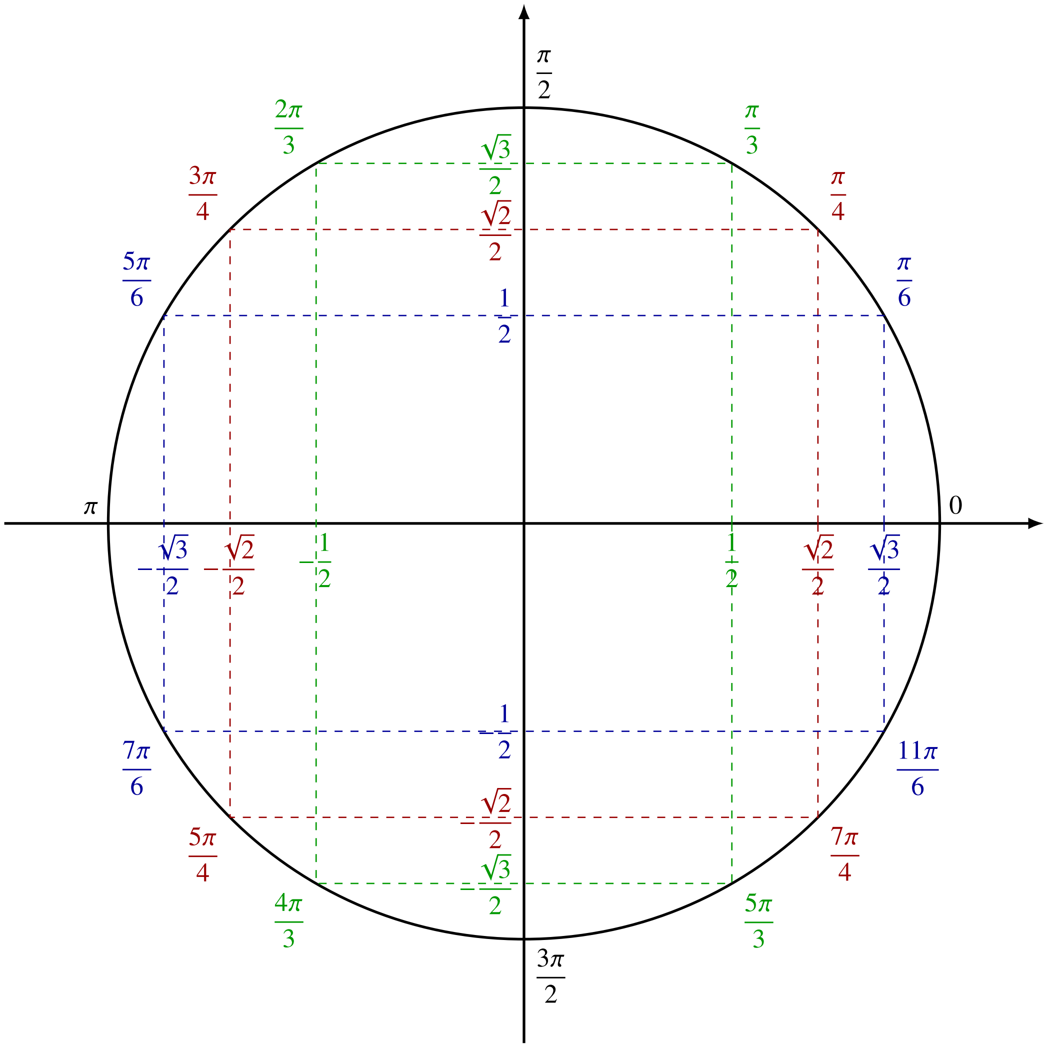
Définition:
Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
Le point M a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$.



Propriétés:
Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x) \in [-1; 1]$
- $\sin(x) \in [-1; 1]$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3.1 Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus



D'après ce cercle trigonométrique, on peut déterminer quelques valeurs utiles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\mathbf{x})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\mathbf{x})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice:

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice:
Résoudre les équations suivantes :

- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0; 2\pi]$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}, x \in [-\pi; \pi]$

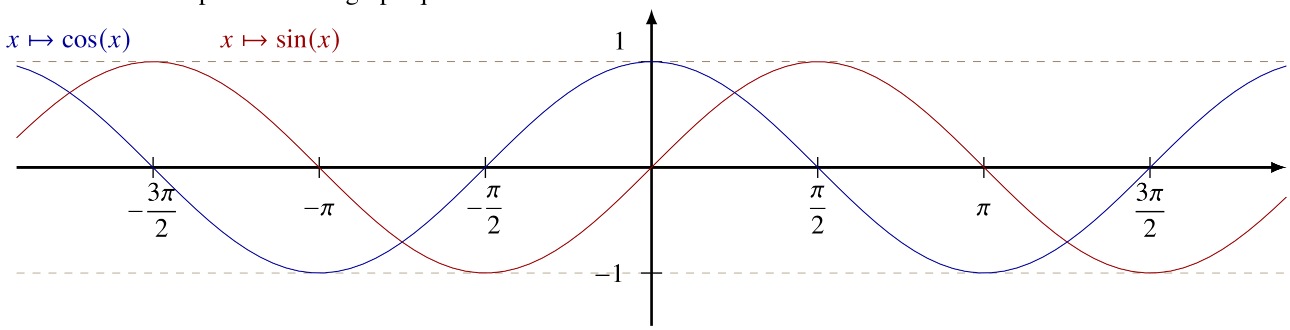
3.2 Fonctions cosinus et sinus

3.2.1 Définitions et représentations graphiques

<u>**Définition**</u>:

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

On en déduit les représentations graphiques suivantes :



D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

<u>**Définition/Propriété**</u>:

$$\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \ \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

On dira alors que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, ou encore simplement 2π-périodiques.

Cela signifie que l'on retrouve la même "parcelle de courbe" sur chaque intervalle de longueur 2π.

3.2.2 Parité

<u>**Définitions**</u>:

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est paire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du répère est une fonction impaire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

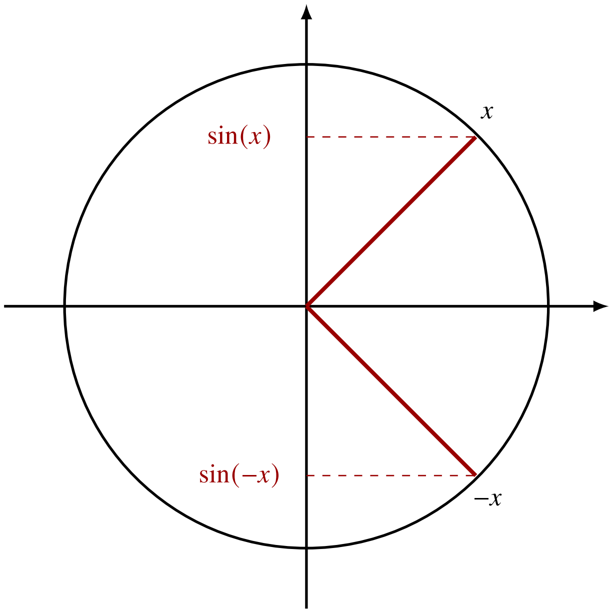
Toujours par construction du cosinus et du sinis sur le cercle trigonométrique, on a que :

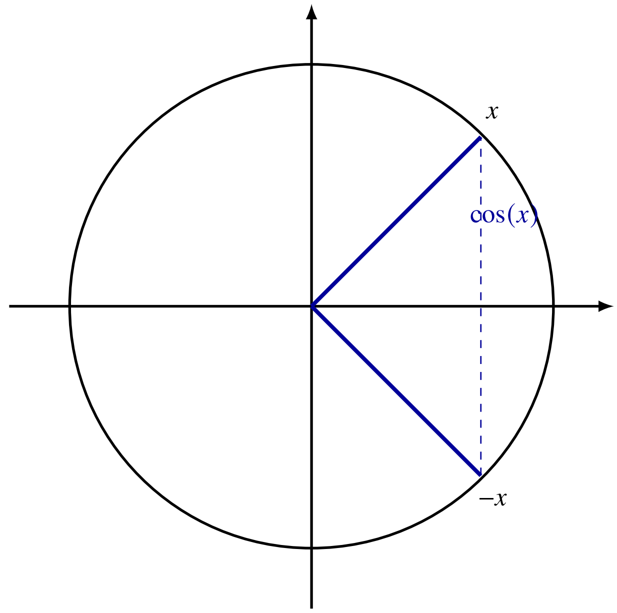
<u>**Propriétés**</u>:

- La fonction cosinus est paire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.

<u>Exercice</u>:
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

Ceci signifie que la fonction cosinus est paire (elle admet une symétrie d'axe l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre se symétrie).





3.2.3 Fonctions sinusoïdales

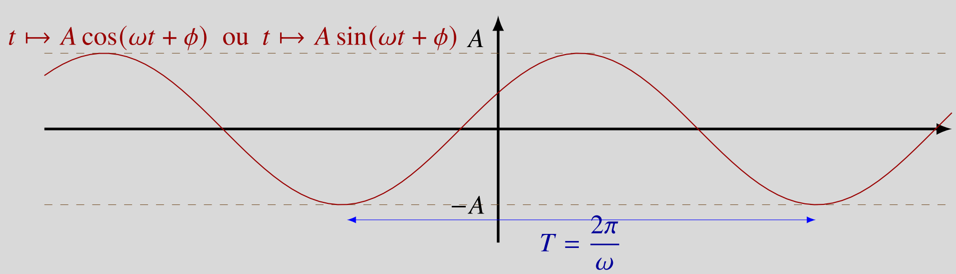
En physique, de nombreux phénomènes peuvent être modélisés par des signaux sinusoïdaux. Ces phénomènes se retrouvent dans l'étude des ondes sonores et ultrasonores, dans l'étude de propagation dans différents milieux ou encore dans l'étude de l'énergie électrique.

Définition: Une fonction sinusoïdale a une expression de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

- A est un réel positif qui représente l'amplitude du signal, c'est-à-dire la valeur maximale prise par la fonction.
- $(\omega t + \phi)$ est la phase instantanée avec :
  - ω : la pulsation, un réel qui s'exprime en radians par secondes.
  - ϕ : un réel s'exprime en radians qui représente la phase à l'origine, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Propriété:

- Les fonctions sinusoïdales sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, exprimé en secondes.
- La fréquence, qui correspond au nombre de périodes par unité de temps est $f = \dfrac{1}{T}$, elle s'exprime en Herz (Hz).
- La fréquence, la pulsation et la période sont liées par : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$



4 Exercice bilan

1. Convertir 279° en radian et $\frac{7\pi}{36}$ en degré.
2. Donner la mesure principale de $\frac{95\pi}{17}$.
3. Placer le point A sur le cercle trigonométrique associé à l'angle $\frac{7\pi}{4}$.
4. Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Etudier la parité de $x :\mapsto 4\sin(5x - 3) + 3\sin(-3x + 5)$.