

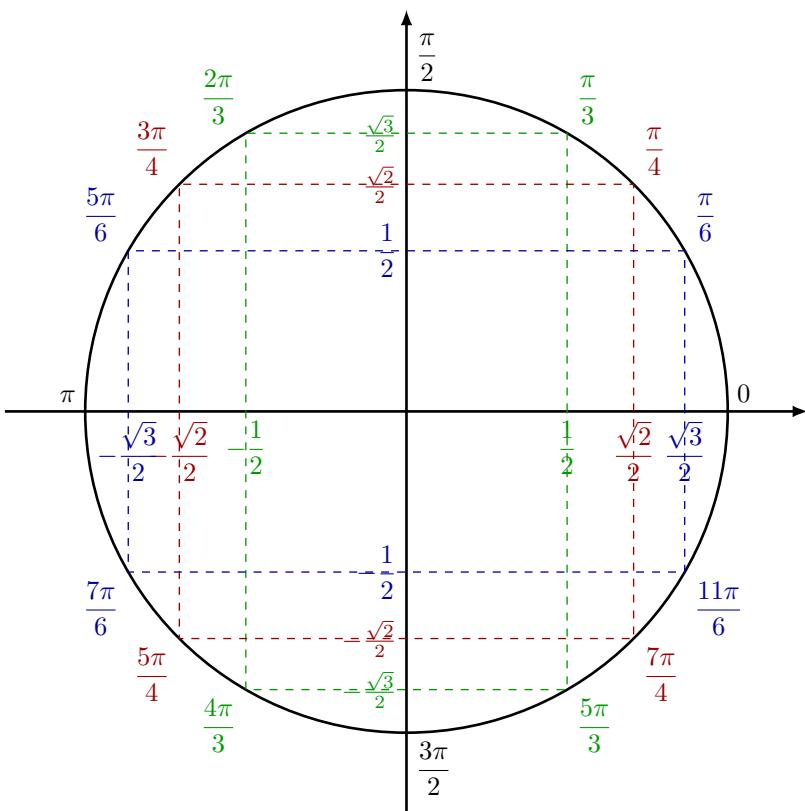
# 1 Trigonométrie

## 1.1 Compétences Attendues

- Effectuer des conversions de degré en radian, de radian en degré.
- Résoudre, par lecture sur le cercle trigonométrique, des équations du type  $\cos(x) = a$  et  $\sin(x) = a$ .
- Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés :  $x$  ;  $-x$  ;  $\pi - x$  ;  $\pi + x$  ;  $\frac{\pi}{2} - x$  ;  $\frac{\pi}{2} + x$ .
- Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.

## 1.2 Exercices

On donne le cercle trigonométrique avec les valeurs remarquables de cosinus et sinus ci-dessous :



### Exercice 1:

Convertir les mesures des angles suivants en degrés :

1. $\frac{\pi}{12}$ rad	2. $\frac{\pi}{5}$ rad	3. $\frac{2\pi}{7}$ rad
-------------------------	------------------------	-------------------------

### Exercice 2:

Convertir les mesures des angles suivants en degrés (arrondir à l'unité près) :

1. 0,314 rad	2. 1,75 rad	3. 7,35 rad
--------------	-------------	-------------

### Exercice 3:

Convertir les mesures des angles suivants en radians :

1. 120°	2. 15°	3. 72°
---------	--------	--------

### Exercice 4:

Convertir les mesures des angles suivants en radians :

1. 95°	2. 135°	3. 275°
--------	---------	---------

### Exercice 5:

Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

1. 0	2. $\frac{7\pi}{6}$	3. $-\frac{9\pi}{4}$	4. $\frac{\pi}{5}$	5. $-\frac{32\pi}{33}$
------	---------------------	----------------------	--------------------	------------------------

### Exercice 6:

Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

1. $-\pi$	2. $\frac{7\pi}{6}$	3. $-\frac{3\pi}{2}$	4. $-\frac{5\pi}{6}$	5. $\frac{7\pi}{3}$
-----------	---------------------	----------------------	----------------------	---------------------

### Exercice 7:

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

1. $\frac{13\pi}{4}$	2. $\frac{8\pi}{3}$	3. $\frac{11\pi}{6}$	4. $\frac{21\pi}{2}$	5. $-\frac{17\pi}{4}$
----------------------	---------------------	----------------------	----------------------	-----------------------

**Exercice 8:**

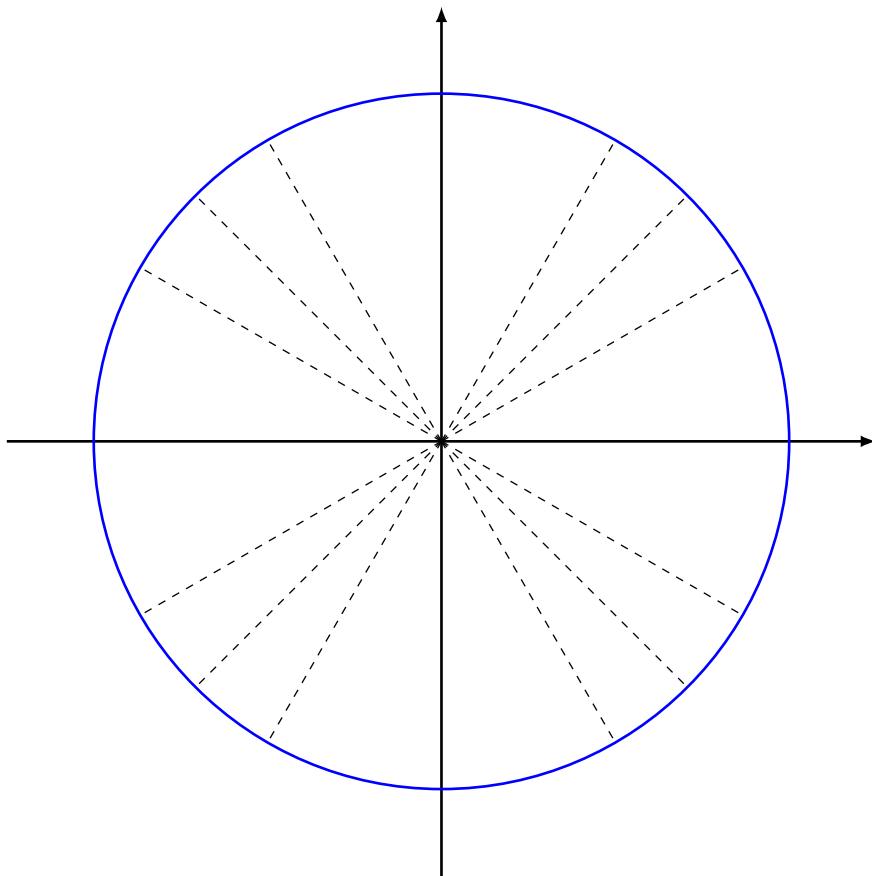
Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

1. $-\frac{11\pi}{3}$	2. $-\frac{19\pi}{6}$	3. $\frac{221\pi}{4}$	4. $-\frac{121\pi}{3}$	5. $\frac{365\pi}{6}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------	-----------------------

**Exercice 9:**

Placer sur le cercle trigonométrique les points  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  et  $J$  associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

1. $13\pi$	3. $-\frac{11\pi}{4}$	5. $-\frac{16\pi}{3}$	7. $\frac{37\pi}{2}$	9. $\frac{28\pi}{3}$
2. $\frac{3\pi}{4}$	4. $-26\pi$	6. $\frac{101\pi}{2}$	8. $-\frac{7\pi}{6}$	10. $-\frac{15\pi}{6}$

**Exercice 10:**

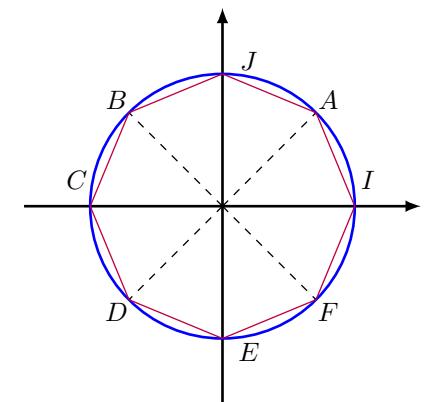
Placer sur le cercle trigonométrique les points  $K, L, M, N, O, P, Q$  et  $R$  associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

1. $\frac{50\pi}{3}$	3. $-\frac{25\pi}{4}$	5. $\frac{25\pi}{2}$	7. $\frac{2\pi}{15}$
2. $\frac{19\pi}{6}$	4. $151\pi$	6. $-\frac{43\pi}{3}$	8. $-\frac{7\pi}{10}$

**Exercice 11:**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1.  $IAJBCDEF$  est un octogone régulier de centre  $O$ . Donner un nombre  $[0; 2\pi[$  associé à chacun des sommets de cet octogone.
2. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier  $IGHKLM$  de centre  $O$  inscrit dans le cercle trigonométrique.

**Exercice 12:**

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $\frac{15\pi}{3}$	2. $-\frac{9\pi}{4}$	3. $-\frac{7\pi}{6}$	4. $-\frac{5\pi}{2}$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

**Exercice 13:**

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\frac{28\pi}{3}$	2. $\frac{2018\pi}{4}$	3. $\frac{101\pi}{6}$	4. $\frac{70\pi}{3}$
-----------------------	------------------------	-----------------------	----------------------

**Exercice 14:**

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\frac{25\pi}{4}$	2. $-\frac{15\pi}{2}$	3. $\frac{43\pi}{4}$	4. $\frac{1981\pi}{3}$
-----------------------	-----------------------	----------------------	------------------------

**Exercice 15:**

Parmi les égalités suivantes, déterminer lesquelles sont vraies :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ | 3. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ |
| 2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 4. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ |

**Exercice 16:**

Calculer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | 3. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$          |
| 2. $\cos(0) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$   | 4. $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ |

**Exercice 17:**

Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant la condition donnée.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$                     | 3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ |
| 2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |   |

**Exercice 18:**

Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant la condition donnée.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ | 3. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi; \pi[$  |
| 2. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$                  | 4. $2\cos^2(x) - 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$ |

**Exercice 19:**

Dans cet exercice, on admettra la formule suivante, valable pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. A l'aide de cette formule, démontrer les formules suivantes :

(a) Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ .

(b) Pour tout réel  $x$ ,  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ .

2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ .

**Exercice 20:**

Dans cet exercice, on admettra vrai la formule de la question 2 de l'exercice précédent.

1. Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .
2. En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ .
3. En appliquant la formule précédente pour  $x = \frac{\pi}{8}$ , déterminer la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .
4. En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ .

**Exercice 21:**

Calculer chaque expression, donner si nécessaire le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$                   | 3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$             |
| 2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi)$ |

**Exercice 22:**

1. Vérifier que  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$ .

2. Exprimer  $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$  en fonction de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 23:**

On admet que  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

1. Calculer la valeur exacte de  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .
2. Sachant que  $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ , en déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ .
3. Sachant que  $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ , en déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ .

**Exercice 24:**

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $A = \cos(\pi + x) + 2 \cos(-x)$

2.  $B = \sin(\pi + x) + 2 \sin(-x)$

3.  $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \cos(-x)$

4.  $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$

**Exercice 25:**

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $E = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \cos(2\pi + x)$

2.  $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

**Exercice 26:**

1. Simplifier l'expression  $G = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos(-x) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

2. Calculer  $G$  quand  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 27:**

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto \cos(2x)$

2.  $g : x \mapsto 2 \sin(x) - 1$

3.  $h : x \mapsto \sin(3x)$

4.  $k : x \mapsto x - \cos(x)$

**Exercice 28:**

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1.  $\phi : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$

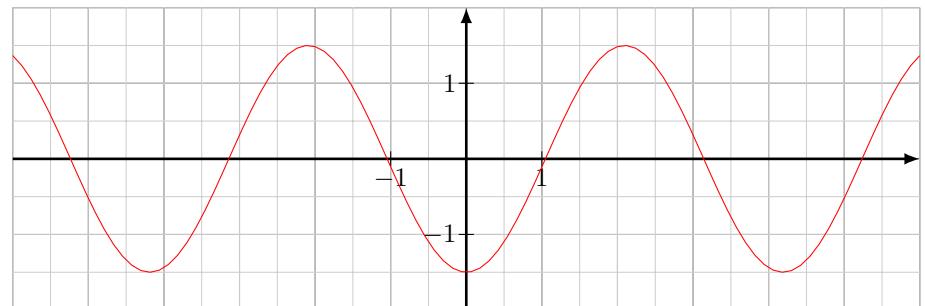
2.  $\psi : x \mapsto \cos^2(x)$

3.  $\rho : x \mapsto \sin^2(x)$

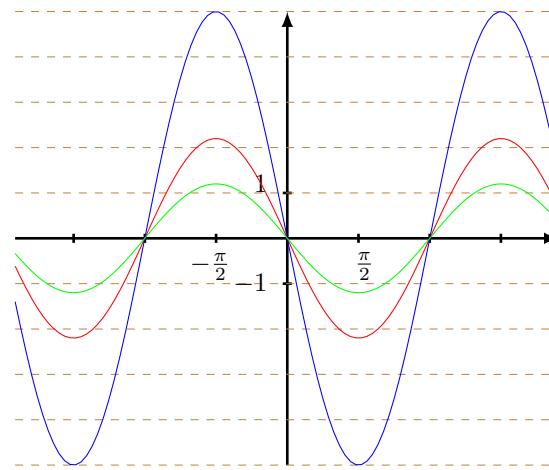
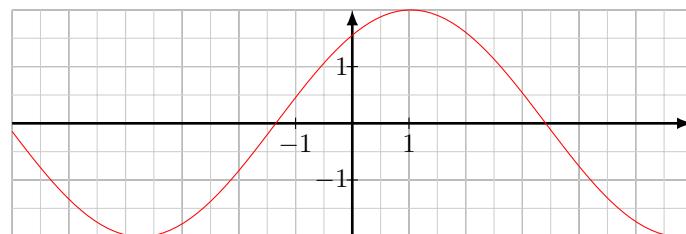
4.  $\theta : x \mapsto x + \sin(x)$

**Exercice 29:**Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto 2 \cos(x) - 1$ .

1. Etudier la parité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Etudier la périodicité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Résoudre pour tout  $x \in [0; \pi]$  l'équation  $f(x) = 0$ .
4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ , tracer la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$ .

**Exercice 30:**Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de  $h(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .**Exercice 31:**

Déterminer l'amplitude des trois signaux représentés par les courbes ci-dessous :

**Exercice 32:**Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de  $g(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ .

**Exercice 33:**

Quelle est l'amplitude  $A$  de la fonction  $f_1$  telle que  $f_1(t) = A \cos\left(2t + \frac{2\pi}{5}\right)$  sachant que  $f_1\left(\frac{3\pi}{10}\right) = -7,5$  ?

**Exercice 34:**

Soit  $h : t \mapsto 4,2 \sin\left(20t + \frac{5\pi}{4}\right)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Donner l'amplitude, la période, la pulsation et la phase à l'origine de cette fonction.
2. Calculer  $h\left(\frac{3\pi}{16}\right)$ ,  $h\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $h\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ .

**Exercice 35:**

Un des funiculaires de Lyon relie le Vieux Lyon au quartier de Fourvière. Il permet de s'élever de 116 mètres sur un trajet long de 427 mètres.

1. Déterminer la mesure de l'angle  $\alpha$  de la pente en degrés (à 0,1 près).
2. Convertir cette mesure en radians.
3. Le téléphérique met 3 minutes pour parcourir cette distance. Quelle est sa vitesse moyenne en  $m/s$  ?
4. Sa vitesse instantanée, en  $m/s$ , est donnée par

$$v(t) = 5,95 \sin\left(-\frac{\pi}{180}t + \pi\right)$$

- . Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? d'une minute ?
- 5. A quel moment le téléphérique atteint-il sa vitesse maximale ?
- 6. La vitesse maximale doit être inférieure à  $6 m/s$ . Ce critère est-il respecté ?

**Exercice 36:**

La température dans une ville est modélisée par la donnée

$$\theta(t) = 1,7 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 3)\right)$$

où  $t$  est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à  $t = 0$ .

1. Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
2. Quels sont les températures extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles ?
3. Avec quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues ?

**Exercice 37:**

La ville de Madrid est située sur la parallèle de latitude  $40^\circ$  Nord. Pendant une année non bissextile, le nombre d'heures de lumière d'une ville située à cette latitude peut être modélisé par la fonction  $d$  définie sur  $[0; 365]$  par :

$$d(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t - 80)\right) + 12$$

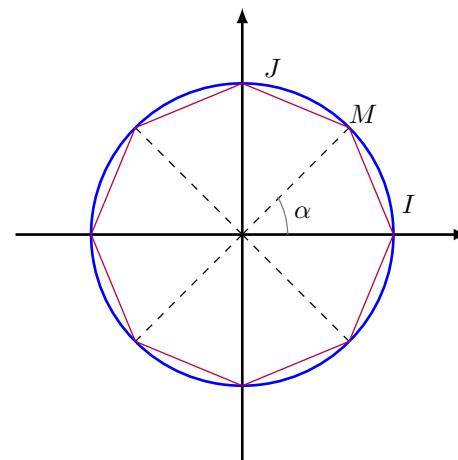
où  $t$  représente le  $t$ -ième jour de l'année.

Déterminer la période l'année durant laquelle Madrid bénéficie de plus d'heures de lumière par jour.

**Exercice 38:**

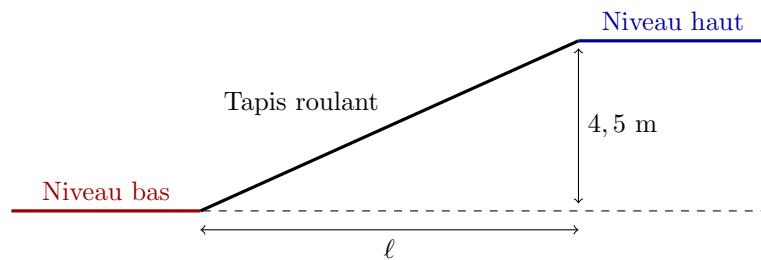
Un polygone régulier à  $n$  côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre  $O$ . La figure ci-contre représente un octogone.

1. Dans ce cas  $n = 8$  et  $\widehat{IOM} = \alpha = \frac{\pi}{4}$ , calculer l'aire  $A_8$  de cet octogone.
  2. De façon générale, pour un polygone régulier à  $n$  côtés, on pose  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ . Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à  $n$  côtés est égale à
- $$A_n = \pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$
3. A l'aide d'un outil numérique, représenter sur  $[0; \pi]$  la fonction  $f$  définie par  $f : x \mapsto \pi \frac{\sin(x)}{x}$ .
  4. A l'aide de la courbe représentative de  $f$ , si  $n$  devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.



**Exercice 39:**

Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus, possède une vitesse de roulement de  $0,8 \text{ m.s}^{-1}$  et une pente maximale de 10%. La distance entre ces deux niveaux est de 4,5 m et on note  $\ell$  la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant. Donner un encadrement de la longueur  $\ell$  pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser la calculatrice.

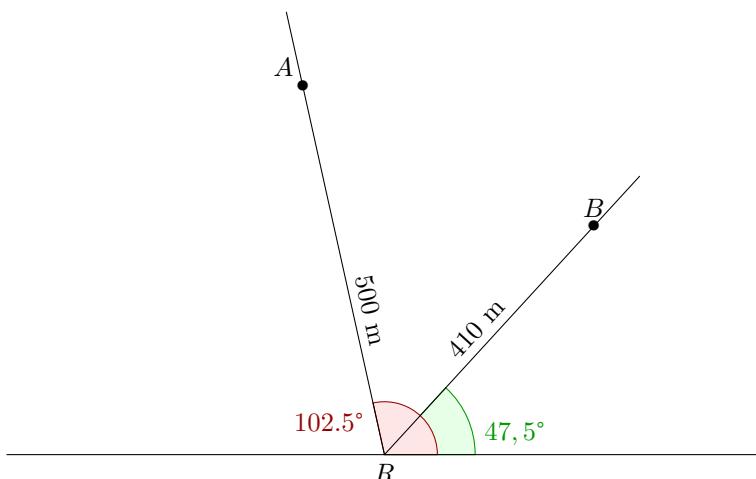
**Exercice 40:**

Deux petits avions  $A$  et  $B$  se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer un banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage.

Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar  $R$  repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-dessous.

Par arrêté municipal dans cette commune et pour des raisons de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à 300m et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de 500m.

Ces deux avions respectent-ils les distances de sécurité imposées ? Justifier.

**Exercice 41:**

La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut-être observée à l'œil nu depuis la Terre.

Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de Mars sont à peu près coplanaires.

Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient en "opposition", c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil.

On note  $T_1$  et  $M_1$  les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant et  $S$  la position du Soleil. Cent six jours plus tard, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives  $T_2$  et  $M_2$  et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle  $\widehat{M_2T_2S}$  est droit.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle  $\widehat{M_1SM_2}$ , sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle  $\widehat{T_1ST_2}$ , puis de l'angle  $\widehat{M_2ST_2}$  sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.
3. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.

