

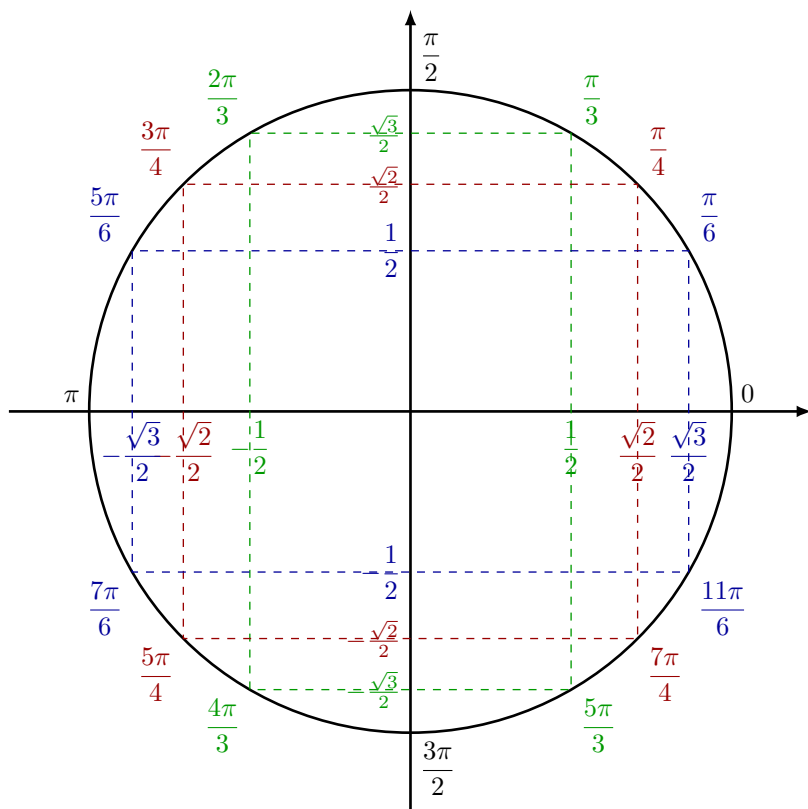
1 Trigonométrie

1.1 Compétences Attendues

- Effectuer des conversions de degré en radian, de radian en degré.
- Résoudre, par lecture sur le cercle trigonométrique, des équations du type $\cos(x) = a$ et $\sin(x) = a$.
- Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés : x ; $-x$; $\pi - x$; $\pi + x$; $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$.
- Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.

1.2 Exercices

On donne le cercle trigonométrique avec les valeurs remarquables de cosinus et sinus ci-dessous :



Exercice 1:

Convertir les mesures des angles suivants en degrés :

$$1. \frac{\pi}{12} \text{ rad} \quad \left| \quad 2. \frac{\pi}{5} \text{ rad} \quad \left| \quad 3. \frac{2\pi}{7} \text{ rad} \right.$$

Exercice 2:

Convertir les mesures des angles suivants en degrés (arrondir à l'unité près) :

$$1. 0,314 \text{ rad} \quad \left| \quad 2. 1,75 \text{ rad} \quad \left| \quad 3. 7,35 \text{ rad} \right.$$

Exercice 3:

Convertir les mesures des angles suivants en radians :

$$1. 120^\circ \quad \left| \quad 2. 15^\circ \quad \left| \quad 3. 72^\circ \right.$$

Exercice 4:

Convertir les mesures des angles suivants en radians :

$$1. 95^\circ \quad \left| \quad 2. 135^\circ \quad \left| \quad 3. 275^\circ \right.$$

Exercice 5:

Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$1. 0 \quad \left| \quad 2. \frac{7\pi}{6} \quad \left| \quad 3. -\frac{9\pi}{4} \quad \left| \quad 4. \frac{\pi}{5} \quad \left| \quad 5. -\frac{32\pi}{33} \right.$$

Exercice 6:

Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

$$1. -\pi \quad \left| \quad 2. \frac{7\pi}{6} \quad \left| \quad 3. -\frac{3\pi}{2} \quad \left| \quad 4. -\frac{5\pi}{6} \quad \left| \quad 5. \frac{7\pi}{3} \right.$$

Exercice 7:

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

$$1. \frac{13\pi}{4} \quad \left| \quad 2. \frac{8\pi}{3} \quad \left| \quad 3. \frac{11\pi}{6} \quad \left| \quad 4. \frac{21\pi}{2} \quad \left| \quad 5. -\frac{17\pi}{4} \right.$$

Exercice 8:

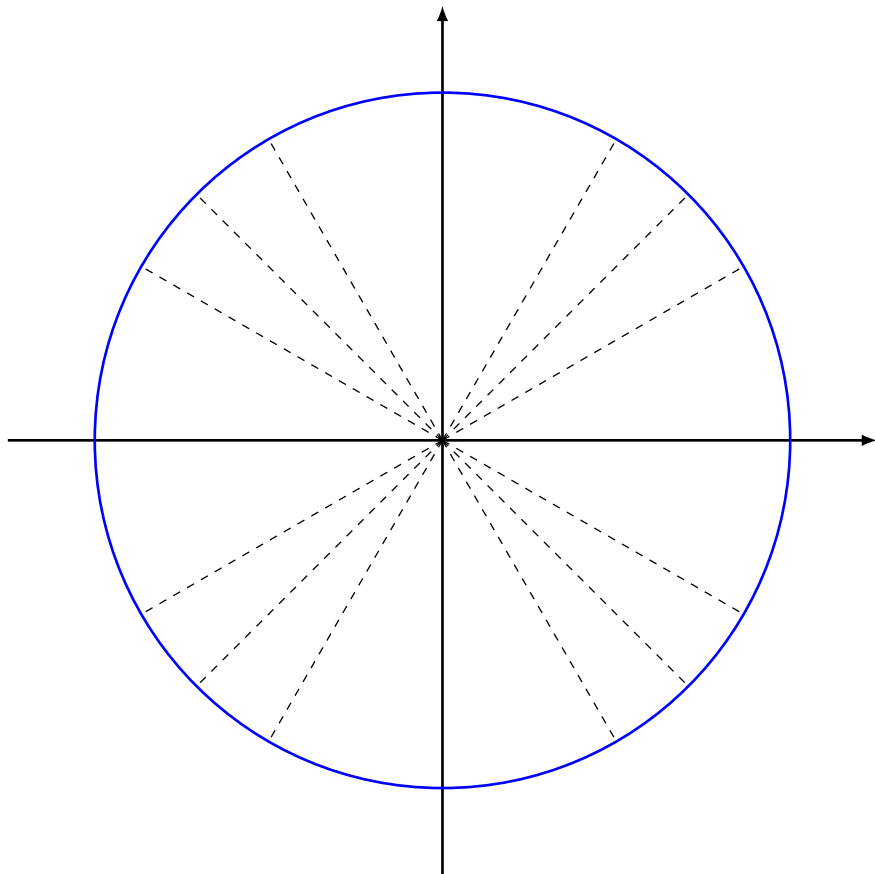
Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

1. $-\frac{11\pi}{3}$	2. $-\frac{19\pi}{6}$	3. $\frac{221\pi}{4}$	4. $-\frac{121\pi}{3}$	5. $\frac{365\pi}{6}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------------	-----------------------

Exercice 9:

Placer sur le cercle trigonométrique les points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants:

1. 13π	3. $-\frac{11\pi}{4}$	5. $-\frac{16\pi}{3}$	7. $\frac{37\pi}{2}$	9. $\frac{28\pi}{3}$
2. $\frac{3\pi}{4}$	4. -26π	6. $\frac{101\pi}{2}$	8. $-\frac{7\pi}{6}$	10. $-\frac{15\pi}{6}$

**Exercice 10:**

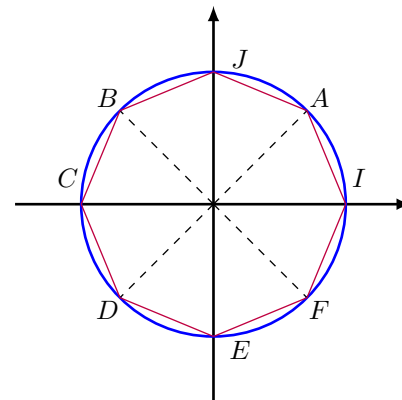
Placer sur le cercle trigonométrique les points K, L, M, N, O, P, Q et R associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants:

1. $\frac{50\pi}{3}$	3. $-\frac{25\pi}{4}$	5. $\frac{25\pi}{2}$	7. $\frac{2\pi}{15}$
2. $\frac{19\pi}{6}$	4. 151π	6. $-\frac{43\pi}{3}$	8. $-\frac{7\pi}{10}$

Exercice 11:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. $IAJBCDEF$ est un octogone régulier de centre O . Donner un nombre $[0; 2\pi[$ associé à chacun des sommets de cet octogone.
2. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier $IGHKLM$ de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique.

**Exercice 12:**

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $\frac{15\pi}{3}$	2. $-\frac{9\pi}{4}$	3. $-\frac{7\pi}{6}$	4. $-\frac{5\pi}{2}$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Exercice 13:

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\frac{28\pi}{3}$	2. $\frac{2018\pi}{4}$	3. $\frac{101\pi}{6}$	4. $\frac{70\pi}{3}$
-----------------------	------------------------	-----------------------	----------------------

Exercice 14:

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\frac{25\pi}{4}$	2. $-\frac{15\pi}{2}$	3. $\frac{43\pi}{4}$	4. $\frac{1981\pi}{3}$
-----------------------	-----------------------	----------------------	------------------------

Exercice 15:

Parmi les égalités suivantes, déterminer lesquelles sont vraies :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ 2. \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ 4. \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{array}$$

Exercice 16:

Calculer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 2. \cos(0) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 4. \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \end{array}$$

Exercice 17:

Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ et } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 2. \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

Exercice 18:

Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \cos(x) = -1 \text{ et } x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right] \\ 2. 2\cos(x) + 1 = 0 \text{ et } x \in [-\pi; \pi[\end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \cos(x) = \sin(x) \text{ et } x \in [-\pi; \pi[\\ 4. 2\cos^2(x) - 1 = 0 \text{ et } x \in [-\pi; \pi[\end{array}$$

Exercice 19:

Dans cet exercice, on admettra la formule suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. A l'aide de cette formule, démontrer les formules suivantes :

(a) Pour tout réel x , $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

(b) Pour tout réel x , $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.

2. Montrer que, pour tout réel x , $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Exercice 20:

Dans cet exercice, on admettra vrai la formule de la question 2 de l'exercice précédent.

1. Justifier que, pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. En déduire que pour tout réel x , $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

3. En appliquant la formule précédente pour $x = \frac{\pi}{8}$, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4. En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 21:

Calculer chaque expression, donner si nécessaire le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ 2. \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 4. \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi) \end{array}$$

Exercice 22:

1. Vérifier que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$.

2. Exprimer $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 23:

On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2. Sachant que $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$.

3. Sachant que $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Exercice 24:

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \cos(\pi + x) + 2 \cos(-x)$	3. $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \cos(-x)$
2. $B = \sin(\pi + x) + 2 \sin(-x)$	4. $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$

Exercice 25:

Simplifier les expressions suivantes :

- $E = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \cos(2\pi + x)$
- $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Exercice 26:

- Simplifier l'expression $G = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos(-x) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
- Calculer G quand $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 27:

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(2x)$	3. $h : x \mapsto \sin(3x)$
2. $g : x \mapsto 2 \sin(x) - 1$	4. $k : x \mapsto x - \cos(x)$

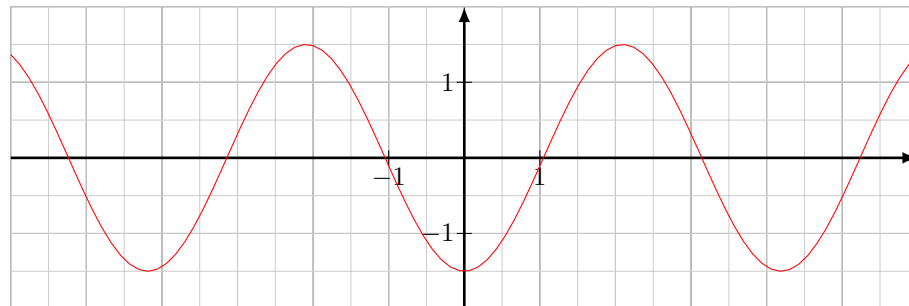
Exercice 28:

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

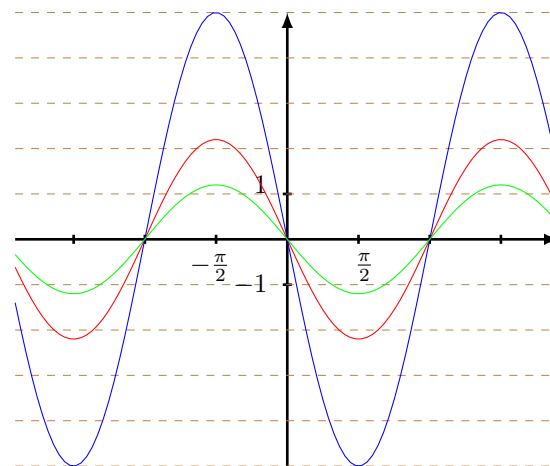
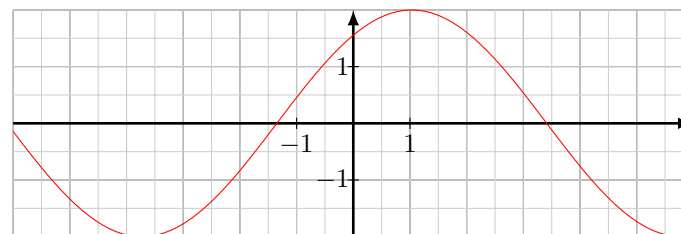
1. $\phi : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$	3. $\rho : x \mapsto \sin^2(x)$
2. $\psi : x \mapsto \cos^2(x)$	4. $\theta : x \mapsto x + \sin(x)$

Exercice 29:Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 2 \cos(x) - 1$.

- Etudier la parité de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Etudier la périodicité de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Résoudre pour tout $x \in [0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
- Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 30:Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de $h(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.**Exercice 31:**

Déterminer l'amplitude des trois signaux représentés par les courbes ci-dessous :

**Exercice 32:**Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de $g(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.

Exercice 33:

Quelle est l'amplitude A de la fonction f_1 telle que $f_1(t) = A \cos\left(2t + \frac{2\pi}{5}\right)$ sachant que $f_1\left(\frac{3\pi}{10}\right) = -7,5$?

Exercice 34:

Soit $h : t \mapsto 4,2 \sin\left(20t + \frac{5\pi}{4}\right)$ définie sur \mathbb{R} .

- Donner l'amplitude, la période, la pulsation et la phase à l'origine de cette fonction.
- Calculer $h\left(\frac{3\pi}{16}\right)$, $h\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $h\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice 35:

Un des funiculaires de Lyon relie le Vieux Lyon au quartier de Fourvière. Il permet de s'élever de 116 mètres sur un trajet long de 427 mètres.

- Déterminer la mesure de l'angle α de la pente en degrés (à 0,1 près).
- Convertir cette mesure en radians.
- Le téléphérique met 3 minutes pour parcourir cette distance. Quelle est sa vitesse moyenne en m/s ?
- Sa vitesse instantanée, en m/s , est donnée par

$$v(t) = 5,95 \sin\left(-\frac{\pi}{180}t + \pi\right)$$

- Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? d'une minute ?
- A quel moment le téléphérique atteint-il sa vitesse maximale ?
- La vitesse maximale doit être inférieure à 6 m/s . Ce critère est-il respecté ?

Exercice 36:

La température dans une ville est modélisée par la donnée

$$\theta(t) = 1,7 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 3)\right)$$

où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

- Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
- Quels sont les températures extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles ?
- Avec quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues ?

Exercice 37:

La ville de Madrid est située sur la parallèle de latitude 40° Nord. Pendant une année non bissextile, le nombre d'heures de lumière d'une ville située à cette latitude peut être modélisé par la fonction d définie sur $[0; 365]$ par :

$$d(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t - 80)\right) + 12$$

où t représente le t -ième jour de l'année.

Déterminer la période l'année durant laquelle Madrid bénéficie de plus d'heures de lumière par jour.

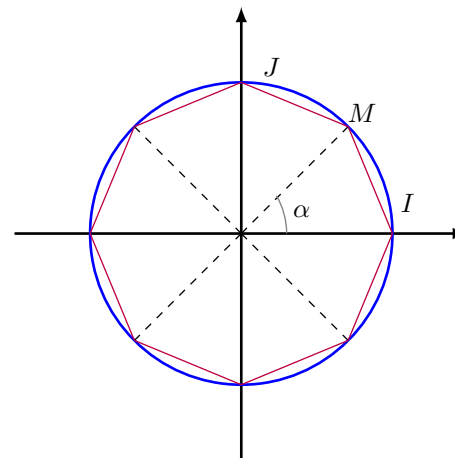
Exercice 38:

Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O . La figure ci-contre représente un octogone.

- Dans ce cas $n = 8$ et $\widehat{IOM} = \alpha = \frac{\pi}{4}$, calculer l'aire A_8 de cet octogone.
- De façon générale, pour un polygone régulier à n côtés, on pose $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est égale à

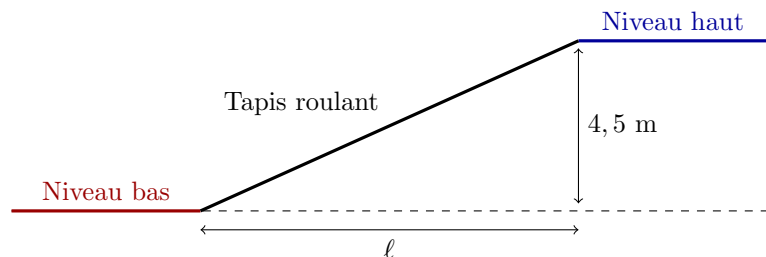
$$A_n = \pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$

- A l'aide d'un outil numérique, représenter sur $[0; \pi]$ la fonction f définie par $f : x \mapsto \pi \frac{\sin(x)}{x}$.
- A l'aide de la courbe représentative de f , si n devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.



Exercice 39:

Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus, possède une vitesse de roulement de $0,8 \text{ m.s}^{-1}$ et une pente maximale de 10%. La distance entre les deux niveaux est de 4,5 m et on note ℓ la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant. Donner un encadrement de la longueur ℓ pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser la calculatrice.

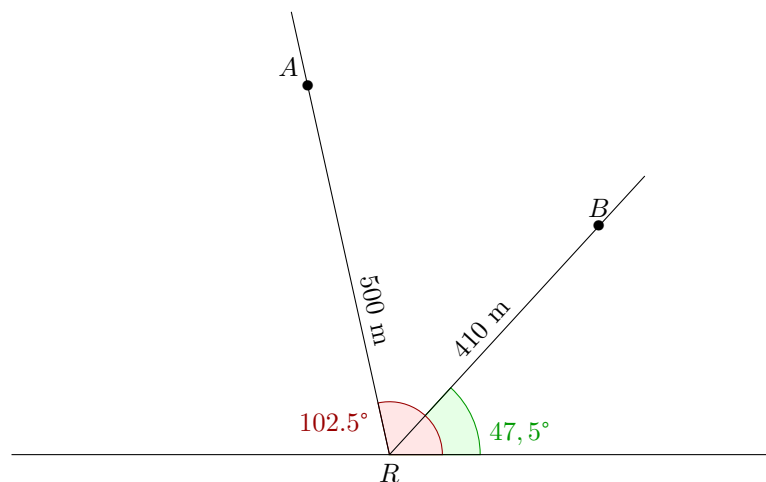
Exercice 40:

Deux petits avions A et B se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer un banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage.

Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar R repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-dessous.

Par arrêté municipal dans cette commune et pour des raisons de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à 300m et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de 500m.

Ces deux avions respectent-ils les distances de sécurité imposées ? Justifier.

**Exercice 41:**

La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut-être observée à l'oeil nu depuis la Terre.

Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de Mars sont à peu près coplanaires.

Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient en "opposition", c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil.

On note T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant et S la position du Soleil. Cent six jours plus tard, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives T_2 et M_2 et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{M_2T_2S}$ est droit.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_1SM_2}$, sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_1ST_2}$, puis de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$ sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.
3. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.

