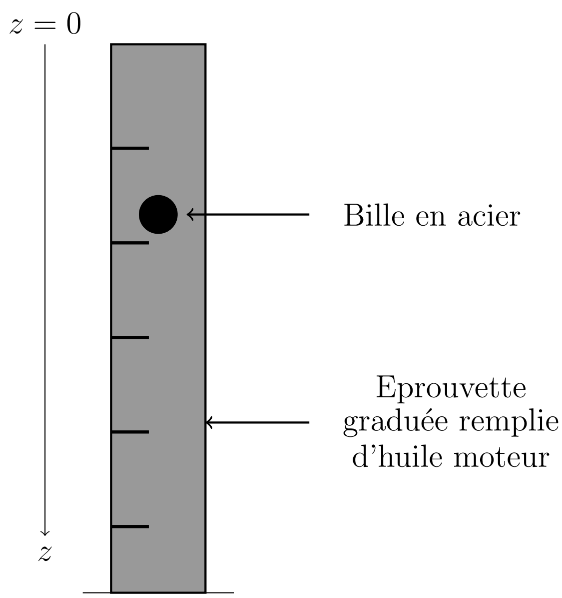
Exercice 1 : *Mexique, 2023, STI2D*
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = -2y + 40.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 200$.

Solution :

Exercice 2: *Métropole, 2023, STI2D*
La viscosité d'une huile, notée ν, est un paramètre exprimé en kg·m^{-1}·s^{-1}, dont la connaissance est essentielle pour toute utilisation de cette huile.
Cet exercice propose un exemple de méthode de mesure de la valeur de la viscosité d'une huile de moteur Diesel du commerce.
Pour réaliser cette mesure, on utilise un "viscosimètre à chute de bille", constitué d'une éprouvette remplie d'huile de moteur dans laquelle est lâchée une bille métallique sphérique.
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la bille est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $z = 0$.



Données :

- Rayon de la bille utilisée : $R = 1,1$ cm.
- Volume de la bille : $V = 5,6$ cm^3 $= 5,6 \times 10^{-6}$ m^3.
- Masse de la bille métallique : $m = 20,1$ g.
- Masse volumique de l'huile étudiée : $\rho_{\text{huile}} = 8,40 \times 10^2$ kg·m^{-3}.
- Intensité de la gravitation : $g = 9,8$ m.s^{-2}.

Les forces exercées sur la bille métallique sont :

- La poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{P_A}$ de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est $P_A = \rho_{\text{huile}} V g$, où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile.
- La force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille est notée $\overrightarrow{f}$. Elle est ici de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est donnée par la relation $f = 6\pi\eta R v$, où v est la valeur de la vitesse de la bille, η est la viscosité de l'huile et R le rayon de la bille.

1. On note v la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme la projection du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ sur l'axe $(\mathrm{O}z)$.

   Montrer que v vérifie l'équation différentielle

   $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{6\pi\eta R v}{m} + g - \frac{\rho_{\text{huile}} V g}{m}.$$

   En explicitant les valeurs numériques, on admet que v est solution de l'équation différentielle (E) suivante où $v(t)$ est exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$ et t en s :

   $$(E) : \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6,8v + 7,5.$$

2. Au début de l'expérience, la bille est introduite dans l'éprouvette avec une vitesse nulle.

   Démontrer que la solution v de cette équation sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant cette condition initiale est définie par :

   $$v(t) = -\frac{75}{68}\mathrm{e}^{-6,8t} + \frac{75}{68}.$$

3. Déterminer la valeur exacte de $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ notée v_{lim} exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$.

4. On mesure expérimentalement une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 1,1\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

   On peut en déduire la valeur de la viscosité η par la relation suivante :

   $$\eta = \frac{(m - \rho_{\text{huile}} V)\, g}{6\pi R v_{\text{lim}}}.$$

   Calculer cette valeur et comparer le résultat à la valeur $\eta = 0,66\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}\,s^{-1}}$ fournie par le fabricant.

Solution :