# 1 Dérivation

## 1.1 Compétences Attendues

- Utiliser les différentes notations du taux de variation et du nombre dérivé en un point
- Effectuer des calculs approchés à l'aide de l'approximation affine en un point.
- Calculer une fonction dérivée
- Étudier le sens de variation d'une fonction.

## 1.2 Exercices

**Exercice 1:**
Un objet supposé soumis à son seul poids, est lancé verticalement vers le haut. Son altitude $y$ en mètres est donnée au bout de $t$ secondes par :

$$y = -4,9t^2 + 10t + 5$$

1. Quelle est l'altitude initiale de l'objet ?
2. Exprimer la vitesse de l'objet $v = \dfrac{dy}{dt}$ en fonction de $t$.
3. Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?
4. L'accélération de l'objet vérifie $a = \dfrac{dv}{dt}$. Déterminer l'expression de cette accélération, que pouvez-vous en dire ?

**Exercice 2:**
La loi d'Ohm aux bornes d'un résistor s'écrit $U = RI$ où $U$ est la tension aux bornes du résistor, $R$ la résistance du résistor et $I$ l'intensité du courant qui le traverse. On s'intéresse à un résistor de résistance 50 $\Omega$ traversé par un courant d'intensité $0,1$ A.

1. Quelle est la tension à ses bornes ?
2. On souhaite estimer la variation de tension $\Delta U$ lorsque la résistance varie de $\Delta R = 2\ \Omega$. Calculer $\frac{dU}{dR}$ puis en déduire une approximation de $\Delta U$.
3. Donner alors un encadrement de la tension.

**Exercice 3:**
$f$ est un fonction dérivable sur un intervalle $I$ qui contient 2. On sait que $f(2) = -1$ et $f'(2) = 3$. En utilisant une approximation affine de $f(2+h)$ où $h$ est un réel proche de 0, déterminer une valeur approchée de $f(2,1)$ puis de $f(2,01)$.

**Exercice 4:**
Soit $n$ un entir naturel quelconque supérieur à 1. Soit $f : x \mapsto x^n$.

1. Rappeler l'expression de $f'(x)$.
2. Donner une approximation affine de $f(1+h)$ où $h$ est un réel très proche de 0 en fonction de $n$.
3. En déduire une valeur approchée de $1,1^3$ puis de $1,1^4$ puis de $1,1^5$.

**Exercice 5:**
Soit $f$ la fonction inverse. En utilisant une approximation affine de $f(-1+h)$ où $h$ est un réel proche de 0, déterminer une valeur approchée de $-\dfrac{1}{0,999}$.

**Exercice 6:**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = -5 - 5x$
2. $g(x) = -6 - \dfrac{3}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{7x}$
4. $i(x) = -3x^2 - 8\cos(x) + 4$

**Exercice 7:**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $j(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$
2. $k(x) = -5{,}6x^4 - 1{,}5x^2 - 5$
3. $l(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$
4. $m(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8x}{9} + \dfrac{1}{3}$

**Exercice 8:**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $n : x \mapsto (5x+3)(-2x+1)$
2. $o : x \mapsto -4x\sin(2x+1)$
3. $p : x \mapsto (3x^2-5)(2x-4)$
4. $q : x \mapsto \dfrac{1}{4-2x}$

**Exercice 9:**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $r : x \mapsto \dfrac{1}{3\cos(x)}$
2. $s : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+2x+4}$
3. $t : x \mapsto \dfrac{5x}{2x-1}$
4. $u : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$

**Exercice 10:**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $v(x) = -5(5x+7)x^2$
2. $w(x) = 9(6x-5)x^2$
3. $y(x) = (9x+8)x^2$
4. $z(x) = (4x+1)(-2x+1)$

**Exercice 11:**
Soit $f : t \mapsto \cos(3t+\pi)$ et $g : t \mapsto \sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Calculer $f'(t)$ et $\dfrac{dg}{dt}(t)$.

**Exercice 12:**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-1;6]$ par $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{5}{2}$ .
Etudier les variations de $f$ sur $[-1;6]$.
*La méthode à suivre est:*

1. *Calculer* $f'(x)$
2. *Etudier le signe de* $f'$ *sur* $[-1;6]$
3. *Etablir le tableau de varaition de* $f$

**Exercice 13:**
On considère la fonction $f$ définie sur $[-3;3]$ par :
$f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$.

1. Déterminer $f'$
2. Etudier le signe de $f'$
3. En déduire les variations de $f$ et donner son tableau de variation
4. Déterminer le minimum de $f$ sur son intervalle de définition

**Exercice 14:**
Soit $f$ la fonction définie sur $[1;2]$ par $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{1}{3}$.

1. Déterminer $f'$
2. Vérifier que $\forall x \in [1;2]$, $f'(x) = (x-1)(x+1)$
3. Etudier le signe $f'$ sur $[1;2]$ dans un tableau
4. Etablir le tableau de variation de $f$

**Exercice 15:**
Pour chaque fonction suivante, définie et dérivable sur un intervalle $I$, calculer sa dérivée puis dresser son tableau de variations.

1. $\alpha : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$, $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
2. $\beta : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$.
3. $\gamma : t \mapsto \cos(t) + 1$, $I = [-\pi, \pi[$.
4. $\delta : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.

**Exercice 16:**
Soit $f : x \mapsto \cos(x)(1-\cos(x))$ définie sur $[0;\pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$.
3. En déduire le tableau de variation de $f$ sur $[0;\pi]$.

**Exercice 17:**
Soit $f : x \mapsto \sin^2(x) - \sqrt{2}\cos(x)$ définie sur $[0;\pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$.
3. En déduire le tableau de variation de $f$ sur $[0;\pi]$.

**Exercice 18:**
Une masse accrochée à un ressort linéaire horizontal glisse sans frottements le long d'un axe orizontal muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i})$. La masse a un mouvement oscillant.
La masse, représentée par son centre de gravité $G$, est repérée par son abscisse $x(t)$ en mètres sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ : $x(t) = -0,5\cos(2t) + 1$ avec $t$ exprimé en secondes.

1. Quelle est l'abscisse du centre $G$ à l'instant initial ?
2. Déterminer $v = \dfrac{dx}{dt}$, vitesse instantanée de la masse en fonction de $t$. Quelle est la vitesse initiale du centre $G$ ?
3. En déduire l'accélération $a = \dfrac{dv}{dt}$ du centre $G$ en fonction de $t$. Quelle est l'accélération initiale du centre $G$ ?

**Exercice 19:**
M.Eiffel a rendez-vous à 200 $km$ de chez lui. Il prend son véhicule pour effectuer ces 200 $km$. Le trafic étant chargé, il parcourt les 100 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 50 $km/h$.

1. (a) En combien de temps parcourt-il les 100 premiers kilomètres ?

(b) On suppose dans cette seule question qu'il parcourt les 100 $km$ suivants à la vitesse moyenne de 120 $km/h$. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble des 200 $km$

2. On appelle $x$ la vitesse moyenne (en $km/h$) sur les 100 derniers kilomètres.

   (a) Exprimer le temps de parcours des 100 derniers kilomètres en fonction de $x$.

   (b) En déduire le temps total de parcours des 200 kilomètres en fonction de $x$.

3. On appelle $V_m(x)$ la vitesse moyenne sur l'ensemble des 200 $km$.

   (a) Montrer que $V_m(x) = \dfrac{200x}{2x+100}$.

   (b) A votre avis, si la vitesse moyenne $x$ sur les 100 derniers kilomètres augmente, que se passe-t-il pour la vitesse moyenne $V_m$ sur l'ensemble du parcours ?

   (c) Etudier les variations de la fonction $V_m$ pour démontrer votre conjecture.

   (d) Pour quelle vitesse moyenne $x$ sur les 100 derniers kilomètres, sa vitesse moyenne $V_m$ sur la totalité du parcours sera-t-elle de 80 $km/h$ ?

   (e) Montrer par le calcul que la vitesse moyenne $V_m$ de M.Eiffel sur la totalité du parcours ne pourra jamais atteindre 120 $km/h$.

**Exercice 20:**
Une marque de sport souhaite fabriquer un shaker de protéines en plastique de forme cylindrique et de volume égal à 1 litre. Mais, pour économiser, les fabricants souhaitent utiliser le moins de plastique possible. On cherche donc les dimensions du shaker idéal.
Pour cela, on note $r$ le rayon du cercle constituant la base du shaker en $cm$ et $h$ la hauteur du cylindre en $cm$.

1. Exprimer le volume du shaker en fonction de $h$ et de $r$. En déduire l'expression de $h$ en fonction de $r$. On rappelle que pour un cylindre $V = \pi r^2 h$.
2. Montrer que la fonction $f : r \mapsto 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$ représente l'aire de la surface totale de plastique en fonction de $r$.
3. A l'aide de la calculatrice, conjecturer une valeur approchée au centième des dimensions $h$ et $r$ du shaker en $cm$ pour que sa surface de plastique soit minimale.
4. Démontrer cette conjecture en calculant $f'(r)$, puis en dressant son tableau de signes et enfin, en en déduisant le tableau de variations de $f$.

**Exercice 21:**
Un circuit est composé d'une bobine d'inductance $L = 0,2\ H$ (henrys), d'un condensateur de capacité $C = 1,25 \times 10^{-4}\ F$ (farads) et d'un interrupteur.
A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et un courant électrique $i$ circule dans le circuit.
Les lois de la physique permettent d'établir que la charge $q(t)$ du condensateur en fonction du temps vérifie l'équation suivante :

$$(E) : q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

où $q''$ désigne la dérivée seconde de la fonction $q$.

1. Calculer la valeur numérique de $\dfrac{1}{LC}$.
2. Soit $k$ une constante réelle quelconque. On pose :
$$q(t) = k\cos(200t)$$
   Calculer $q'(t)$ puis $q''(t)$ en fonction de $k$
3. Montrer que la fonction $q$ définie par l'expression précédente est bien solution de $(E)$.
4. On sait maintenant que, à l'instant $t = 0$, la charge du condensateur mesuré en Coulombs est $10^{-3}$, en déduire la valeur de la constante $k$.
5. L'intensité $i$ dans le circuit vérifie $i = \dfrac{dq}{dt}$. Déterminer l'intensité du courant dans le circuit après 2 secondes. On arrondira au centième.

**Exercice 22:**
Un athlète a ingéré un produit dopant. La concentration de ce produit dans le sang, en mg/L, est modélisé par la fonction $C$ définie sur $[0; +\infty[$ par ;

$$C(t) = \frac{at}{t^2+1}$$

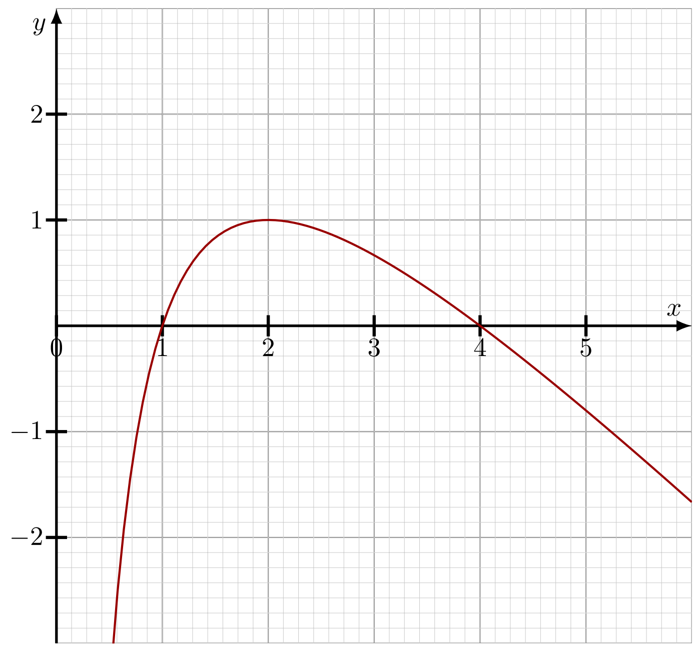
où $t$ représente le temps en heures après ingestion et $a$ est un paramètre réel positif compris entre 5 et 10 représentant un facteur d'absorption du produit.

1. Déterminer la concentration initiale du produit dans le sang.
2. Calculer la dérivée $C'(t)$ en fonction de $a$.
3. Etudier le signe de $C'(t)$ et en déduire le tableau de variations de $C$.
4. Les variations de $C$ sont-elles modifiées selon les valeurs de $a$ ?

5. On considère que le produit est détectable dans le sang tant que sa concentration est supérieure à 1 mg/L. Pour $a = 7$, déterminer combien de temps le produit est détectable.

**Exercice 23:**
Soit $f : x \mapsto ax + b + \dfrac{c}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
La courbe représentative de la fonction $f$ est donnée ci-dessous. On sait que :

- la courbe passe par les points $M(1; 0)$ et $N(2; 1)$ ;
- la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est horizontal.




1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $a$ et $c$.
2. Traduire mathématiquement les données de l'énoncé.
3. En utilisant les 3 équations trouvées, montrer que $f(x) = -x + 5 - \dfrac{4}{x}$.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$.
5. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de $f$.

**Exercice 24:**
A Amsterdam, une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines afin de promouvoir une nouvelle marque de smoothies.
Une étude montre qu'apèrs $x$ semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes de cette ville ayant pris connaissance de la marque est modélisé par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{75x}{x+2}$$

L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit ce smoothie au qu'au moins 70% des habitants d'Amsterdam aient pris connaissance de cette marque.

1. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif est atteint ?
2. Etudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0; 30]$.
3. Après les 15 premières semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
4. Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?

**Exercice 25:**
Dans une cour rectangulaire $ABCD$ de $8m$ sur $4m$, on souhaite délimiter deux carrés potagers dans deux coins opposés ($AEFG$ et $IJCK$) avec $G$, $F$, $I$ et $J$ alignés. Comment faut-il construire ces deux carrés potagers pour que l'aire de la zone restante soit maximale.