1 Primitives

1.1 Compétences Attendues

- Calculer des primitives.
- Construire point par point, par la méthode d'Euler, une approximation de la courbe représentative de la solution d'un problème de Cauchy du type : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

1.2 Exercices

Exercice 1:
La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f : x \mapsto 7$ et $F : x \mapsto 7x + 4$
2. $f : x \mapsto -2x$ et $F : x \mapsto -2x^2$
3. $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $F : x \mapsto x^3 + 1$
4. $f : x \mapsto x^3 - 2x$ et $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - x^2 - 3$

Exercice 2:
La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$
2. $f : x \mapsto -\dfrac{x}{1+x^2}$ et $F : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3}{(x+2)^2}$ et $F : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{5t^4}{1+t^5}$ et $F : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^5}$

Exercice 3:
Montrer que F est une primitive de f.

1. $f : x \mapsto 4$ et $F : x \mapsto 4x - 7$
2. $f : x \mapsto 2x + 3$ et $F : x \mapsto x^2 + 3x$
3. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $F : x \mapsto -\dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$
4. $f : x \mapsto 9x^2$ et $F : x \mapsto 3x^3$

Exercice 4:
Montrer que F est une primitive de f.

1. $f : x \mapsto x^2$ et $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 2$
2. $f : x \mapsto 8x^3 - 6x^2$ et $F : x \mapsto 2x^4 - 2x^3$
3. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2}$ et $F : x \mapsto \dfrac{3}{x} - 7$
4. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $F : x \mapsto -\cos(x) + 1$

Exercice 5:
Justifier que la fonction F est une primitive sur $]0; +\infty[$ de f.

1. $f : x \mapsto -6\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $F : x \mapsto 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)$ et $F : x \mapsto 2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

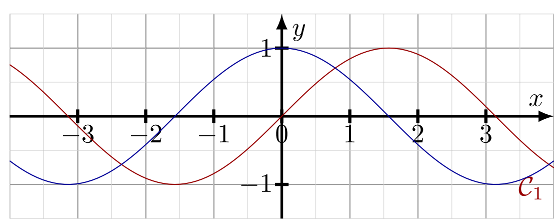
Exercice 6:
Pendant un match de rugby, un joueur tape une chandelle : le ballon décolle verticalement de son pied à l'instant $t = 0$. Lors des deux premières secondes, la vitesse du ballon (en m/s) à l'instant t (en s) est donnée par $v(t) = -9,8t + 21$ et la hauteur du ballon (en m) par $h(t) = -4,9t^2 + 21t + 0,5$.

1. Vérifier que h est une primitive de v.
2. A quelle hauteur se trouve le ballon deux secondes après avoir été tapé ?

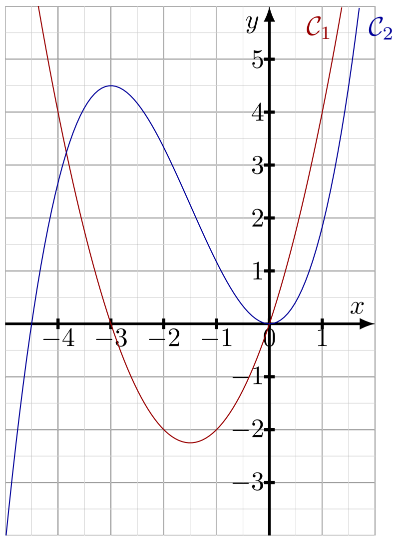
Exercice 7:

1. Vérifier que $F : x \mapsto \cos(x) + x\sin(x)$ est une primitive de $f : x \mapsto x\cos(x)$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8:
Une fonction f et une primitive F sont représentées ci-dessous. Préciser, en justifiant, laquelle des deux courbes $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ correspond à celle de F.



Exercice 9:
Une fonction f et une primitive F sont représentées ci-dessous. Préciser, en justifiant, laquelle des deux courbes $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ correspond à celle de F.



Exercice 10:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$
2. $x \mapsto 2x - \dfrac{1}{3}$
3. $x \mapsto \dfrac{x^2}{3} - x$
4. $x \mapsto 3x^2 + \dfrac{2x}{3} - 7$

Exercice 11:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto -5\cos(t)$
2. $g : x \mapsto 2x^3 - 5x + 3$
3. $h : t \mapsto -8\sin(2t)$
4. $i : t \mapsto \dfrac{5}{t^2}$

Exercice 12:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto \dfrac{t^6}{5}$
2. $g : x \mapsto \cos(2x)$
3. $h : t \mapsto \sin\left(3t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $i : t \mapsto \dfrac{t^3 + 2t^2 - 1}{t^2}$

Exercice 13:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0:

1. $f : t \mapsto 6t^5$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$
2. $g : x \mapsto 0.5x^4 + 3x^3 + 5x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

Exercice 14:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0:

1. $h : t \mapsto 4t - \dfrac{2}{t^2}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$
2. $i : t \mapsto t + \dfrac{5}{t^2} + 3\cos(t + 3\pi) - 3\sin(5t)$; $x_0 = \pi$ et $y_0 = 2$

Exercice 15:
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 16:
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto \sin(2t)$ vérifiant $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 17:
Une voiture électrique formule E de l'écurie française DS PENSKE passe de 0 à 100 km/h en 2,5 s.

1. Convertir 100 km/h en m/s.
2. Calculer l'accélération moyenne (a), exprimée en m/s^2 (arrondir au centième).
3. On suppose que le mouvement de ce véhicule est uniformément accéléré, c'est-à-dire que sa vitesse instantanée, exprimée en m/s, est proportionnelle au temps t, telle que $v(t) = at$.
   Exprimer v en fonction de t en considérant $v(0) = 0$.
4. Sachant que la fonction distance d est une primitive de la fonction vitesse v, choisir, parmi les fonctions suivantes, quelle est celle qui est une primitive de la fonction vitesse :
   (a) $d_1(t) = 22,22t + k$
   (b) $d_2(t) = 11,11t^2 + k$
   (c) $d_3(t) = 5,555t^2 + k$
5. A l'instant initial, le véhicule est à l'arrêt, donc $d(0) = 0$. En déduire la valeur de k.
6. Calculer $d(2,5)$, arrondir au dixième. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé. En déduire la distance parcourue par la voiture électrique pendant la phase d'accélération (passe de 0 à 100 km/h).

7. En gardant une accélération constante, au bout de combien de temps la formule E a-t-elle parcouru 100 m ?

Exercice 18:
La chaussure d'une princesse est lâchée depuis le sommet O de la tour d'un château. La position de l'objet à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O; \overrightarrow{i})$. Sa vitesse v, en fonction du temps t, est donnée par $v(t) = 10t$.

1. Déterminer l'accélération a du mouvement.
2. Donner une expression possible de $x(t)$.
3. Y-a-t-il d'autres expressions qui conviennent pour x ?
4. Peut-on choisir une expression qui correspond au fait que la chaussure est lâchée en O, c'est-à-dire vérifiant $x(0) = 0$.

Exercice 19:
Un TGV met 7 minutes pour passer de l'arrêt à sa vitesse de croisière qui est de 300 km/h avec une accélération constante a.

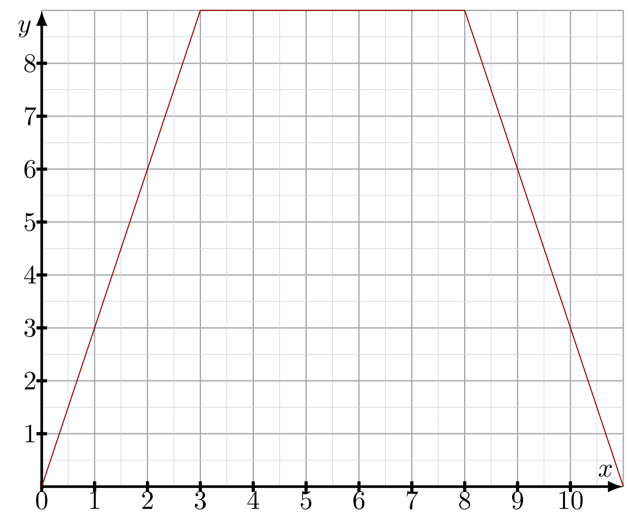
1. Calculer l'accélération a.
2. En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Quelle distance a parcouru le TGV pour atteindre sa vitesse de croisière ?

Exercice 20:
Un TGV est lancé à 300 km/h doit freiner. Son accélération est alors proportionnelle au temps : $a(t) = kt$ avec $k < 0$. Il s'arrête en 32 secondes. Sur quelle distance a-t-il freiné ?

Exercice 21:
Julien monte dans la cabine d'ascenseur en bas de son immeuble et se place sur un pèse-personne.

L'accélération a (en m/s^2) de la cabine est donnée par $a = \dfrac{Mg}{m} - g$ où m désigne la masse (en kg) de la personne et M l'affichage de la balance (en kg).
On prendra $m = 70$ kg et $g = 10$ m/s^2.

Le graphique ci-dessous représente la vitesse de la cabine (en m/s) en fonction du temps en seconde :



1. Justifier que l'intervalle $[0; 3]$, la vitesse s'exprime par $v(t) = 3t$.
2. En déduire la valeur de l'accélération a de la cabine sur $[0; 3]$.
3. Entre les instants $t = 0$ et $t = 3$, Julien prétend que la balance lui affiche $M = 91$ kg. Vérifier la cohérence des propos.
4. Déterminer l'expression de la primitive h de v sur $[0; 3]$ qui s'annule en 0.
5. A quelle vitesse et à quelle hauteur se trouve la cabine au bout de 3 m/s.
6. Entre les instants $t = 3$ et $t = 8$, la vitesse est constante et égale à 9 m/s. Justifier que la hauteur h au bout de 8 s est de $58,5$ m.
7. Déterminer le coefficient directeur de la droite lorsque le mouvement a décéléré.
8. Quelle est la valeur, en kg, affichée par le pèse-personne au temps $t = 10$?
9. Montrer que l'expression de la vitesse v, pour tout $t \in [8; 11]$ est $v(t) = -3t + 33$.
10. Déterminer l'expression de la primitive h de v telle que $h(8) = 58,5$.
11. En déduire la distance parcourue, verticalement, au cours du trajet de l'ascenseur.