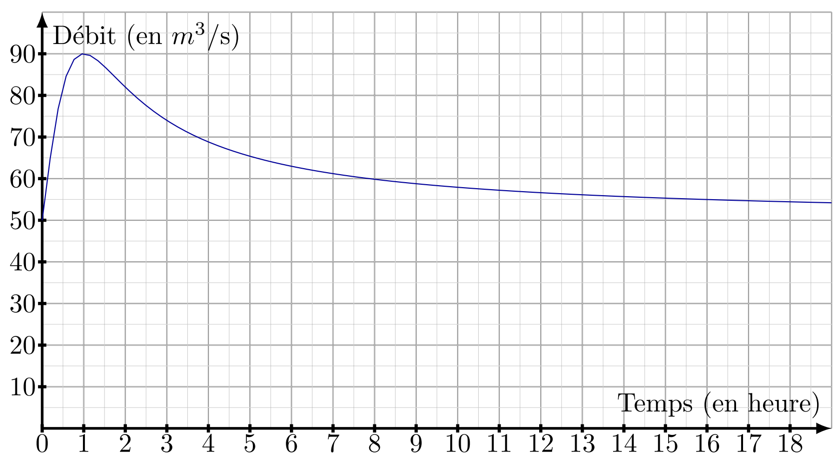
1 Généralités sur les fonctions

1.1 Compétences Attendues

- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction et son tableau de variation.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction et son tableau de variation.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Après un épisode pluvieux, un organisme surveille la crue et la décrue d'une rivière qui traverse une azone habitée. Les relevés des débits, exprimés en $m^3 \cdot s^{-1}$ (mètre cube par seconde), ont permis d'établir la courbe ci-dessous pour les premières heures:



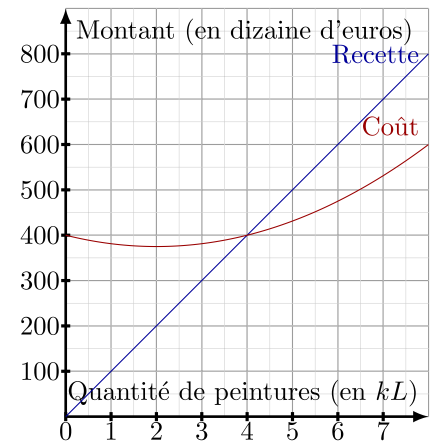
En utilisant le graphique, avec la précision permise par le graphique, répondre sans justification aux questions suivantes :

1. Donner le débit de la rivière au début de la crue.
2. Indiquer le débit maximal et le moment auquel il est atteint.
3. On considère qu'il y a des risques d'inondations au-delà d'un débit de la rivière de 70 $m^3 \cdot s^{-1}$. Donner l'intervalle de temps pendant lequel il y a des risques d'inondations.

Exercice 2:

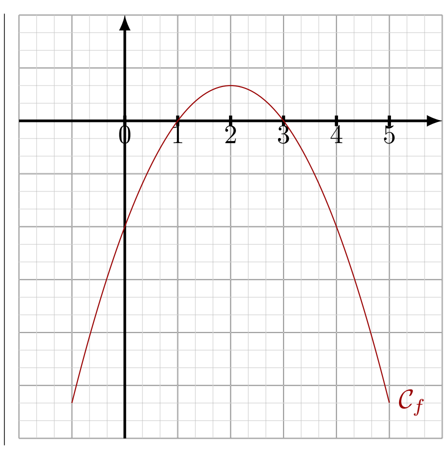
L'entreprise Ecolor est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

1. Déterminer le coût de production de 2 000 litres de peinture.
2. Quelle est la production de peinture vendue par l'entreprise pour une recette de 5 000 euros ?
3. A partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
4. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3 000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 8 000 litres ?



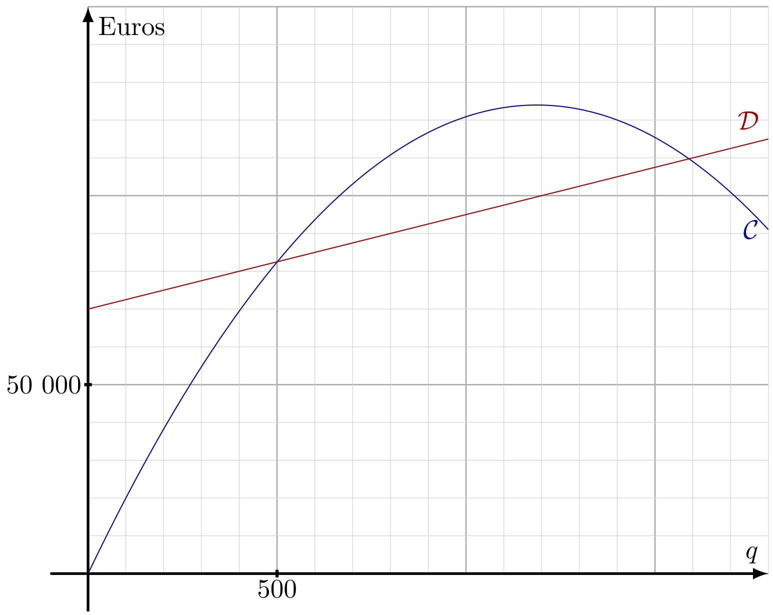
Exercice 3:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ et $f(5)$.
2. Dans quel intervalle varie f sur $[-1; 5]$?
3. Résoudre graphiquement sur $[-1; 5]$ les équations suivantes : $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -2$; $f(x) = \dfrac{2}{3}$.
4. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre -1 et 5 le nombre $f(x)$ est positif.
5. Résoudre graphiquement sur $[-1; 5]$ l'inéquation $f(x) \geq -2$.
6. Donner le tableau de variation de f sur $[-1; 5]$. Déterminer en quelle valeur la fonction f atteint son maximum.



Exercice 4:

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente la recette exprimée en euros, d'une entreprise agricole en fonction de la quantité de pommes de terre récoltées q, exprimée en tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole. La droite $\mathcal{D}$ représente le coût de production en euros en fonction de la quantité récoltée q.



1. Déterminer graphiquement la recette pour une récolte de : 400 tonnes, 600 tonnes, 1100 tonnes et 1600 tonnes.

2. Déterminer graphiquement la récolte correspondant à une recette de 110000 euros. Déterminer le coût de production correspondant.

3. Déterminer graphiquement la quantité récoltée correspondant à une recette maximale.

4. Donner une explication à caractère économique du fait, que, au-delà d'une certaine production, la recette diminue alors que la production augmente.

5. La culture est rentable lorsque la recette est supérieure au coût de production.
   (a) Déterminer graphiquement si la culture est rentable pour une récolte de 200 tonnes, pour une récolte de 1000 tonnes.
   (b) Déterminer graphiquement dans quel intervalle doit varier la récolte q pour que la culture soit rentable.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur $[-1; 2]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur la figure ci-dessous.

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 2]$?

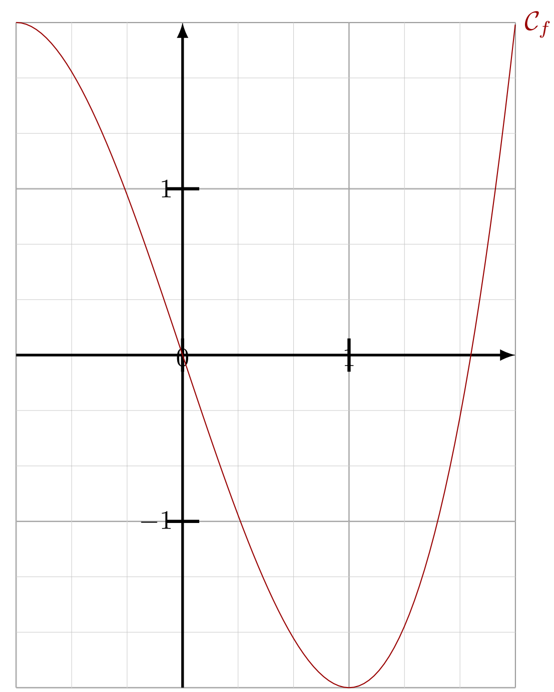
3. (a) Déduire du graphique qu'il existe deux nombres réels x tels que $f(x) = 0$.
   (b) Donner une valeur approchée de ces deux nombres.

4. (a) Résoudre graphiquement sur $[-1; 2]$ l'équation $f(x) = 2$.
   (b) Résoudre graphiquement sur $[-1; 2]$ l'équation $f(x) = -2$.

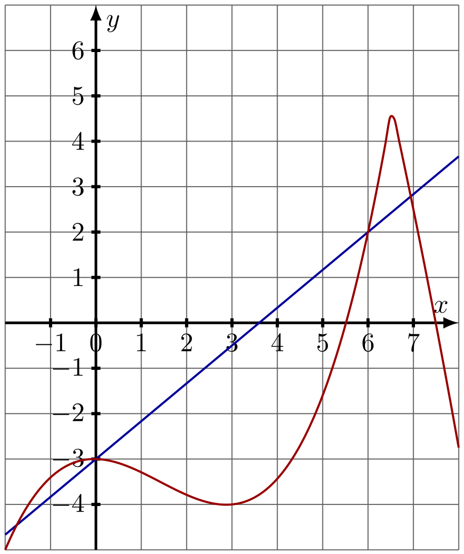
5. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 2]$.

6. Indiquer dans un tableau le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 2]$.

7. On admet que pour tout $x \in [-1; 2]$, $f(x) = x^3 - 3x$.
   (a) Mettre $f(x)$ sous forme factorisée.
   (b) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.



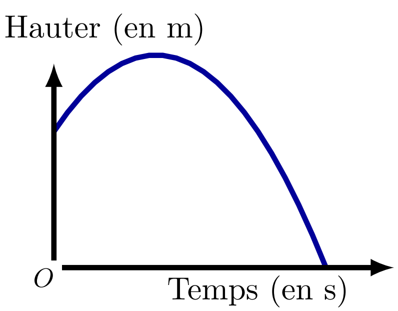
Exercice 6:
On considère les fonctions b et t définies sur $\mathbb{R}$ et dont on a représenté ci-dessous une partie de leurs courbes respectives.
Résoudre graphiquement l'équation $b(x) = t(x)$ sur $[-3;8]$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $b(x) \leqslant t(x)$ sur $[-3;8]$.



Exercice 7:
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Karim a effectué un saut en moto. On note t la durée (en secondes) de ce saut. Le saut commence dès que Karim quitte la rampe c'est-à-dire lorsque $t = 0$. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction u suivante :

$$u(t) = (-4t - 1{,}4)(t - 3{,}9)$$

Voici la courbe représentative de cette fonction u :

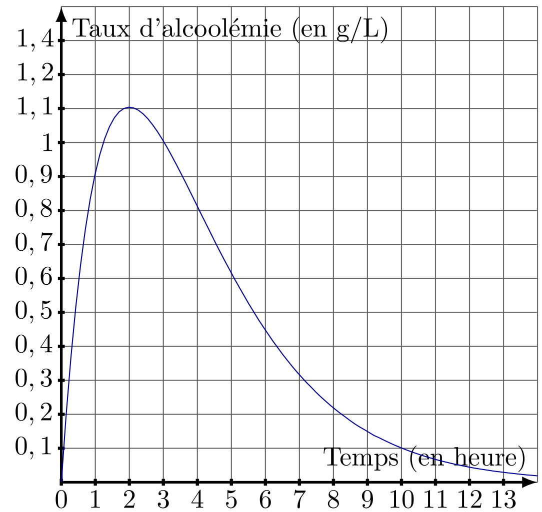


1. Calculer $u(4)$. Que peut-on en déduire ?
2. À quelle hauteur Karim se trouve-t-il lorsqu'il quitte la rampe ?
3. Combien de temps dure le saut de Karim ?
4. Développer et réduire l'expression de u.

Exercice 8:
Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0,5$ g/L.
Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 10 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction g.

- t représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool.
- $g(t)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

On donne la représentation graphique de la fonction g dans un repère.



1. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(t) > 0,5$.
3. À l'instant $t = 0$, il était 11 h. À quelle heure, à la minute près, l'automobiliste peut-il reprendre le volant sans être en infraction ?

Exercice 9:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = (-5) - 5x$
2. $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{7}$
3. $k(x) = -3x^2 - 8x + 4$
4. $l(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$

Exercice 10:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $m(x) = -5{,}6x^2 - 1{,}5x - 5$
2. $o(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$
3. $p(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8x}{9} + \dfrac{1}{3}$
4. $q(x) = 4{,}5x^3 - 3{,}4x^2 + 7$

Exercice 11:
Déterminer dans chacun des cas suivants une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2 + 2x$ et $a = 3$.
2. $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$ et $a = 2$.
3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 1$ et $a = -1$.

Exercice 12:
Soit $f : x \mapsto -4x^3 - 10x^2 + 8x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = -4(3x - 1)(x + 2)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 13:
Soit $f : x \mapsto x^3 + 5x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations complet de f.

Exercice 14:
Le service d'urgence d'un hôpital reçoit un patient infecté par une bactérie très virulente. On administre à ce patient un puissant antibiotique. On considère que la fonction f permet de modéliser, en fonction du temps, le nombre de bactéries (en centaines), présentes dans le prélèvement sanguin effectué sur le patient à l'instant t (en heures). Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 190$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in [0; 12]$.
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 12]$: $f'(t) = -3(t + 1)(t - 7)$.
3. Etudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer le maximum de f sur l'intervalle $[0; 12]$ et préciser en quelle valeur de t il est atteint. Interpréter ce résultat.
5. La vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant t est donnée par $f'(t)$. Déterminer la vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant $t = 10$.

Exercice 15:
Julia utilise un lance-pierre pour faire tomber des boites de conserves. Les boîtes se trouvent au sol à une distance de $L = 50m$ de Julia qui se trouve à une hauteur $h = 1,5m$.
En l'absence de frottement, les équations de Newton pour l'études mouvements s'écrivent :

$$x(t) = v_{0x}t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h$$

Avec :

- $x(t)$ l'abscisse du projectile en fonction du temps ;
- $y(t)$ l'ordonnée du projectile en fonction du temps ;
- $v_{0x} = 20m/s$ la composante horizontale de la vitesse initiale ;
- v_{0y} la composante verticale de la vitesse initiale ;
- $g = 10m/s^2$ la constante de gravitation.

On souhaite connaître la valeur de v_{0y} pour que Julia atteigne les boîtes.

1. Calculer $x'(t)$.
2. Montrer que $t = \dfrac{x}{20}$ et en déduire que :
$$y(x) = -0,0125x^2 + \frac{v_{0y}}{20}x + 1,5$$
3. Calculer $y(0)$.
4. Faire un schéma représentant la situation.
5. Calculer $y'(x)$ puis $v_0 = y'(0)$.
6. Montrer que $y(x) = -0,0125x^2 + v_0x + 1,5$.
7. Pour que la pierre atteigne les boîtes il faut que la parabole coupe l'axe des abscisses à $x = 50$. En déduire la valeur de v_{0y}.