1 Géométrie repérée

1.1 Compétences Attendues

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur.
- Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soient les points $A(2;3)$; $B(23;6)$; $C(-10;-5)$; $D(4;-3)$; $E(8;19)$; $F(17;37)$; $G(11;25)$ et $H(-8;-14)$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$
2. (a) Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?
   (b) Les droites (BC) et (AD) sont-elles parallèles ?
3. (a) Les points E,F et G sont-ils alignés ?
   (b) Les points E,F et H sont-ils alignés ?

Exercice 2:
On considère les points $A(3;7)$; $B(-3;3)$ et $C(7;-5)$. On considère les points :

- M,N et P les milieux respectifs de $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$
- S symétrique de M par rapport à B
- G et H définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$
   (b) Calculer les coordonnées du point M
   (c) Calculer de la même manière les coordonnées de N et P
3. (a) Exprimer $\overrightarrow{MS}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$
   (b) Calculer les coordonnées de S
4. Calculer les coordonnées de G et H
5. Montrer que les droites (MH) et (SP) sont parallèles
6. Montrer que les points S,G et N sont alignés

Exercice 3:
Soit ABC un triangle où $A(11;2)$; $B(3;-2)$ et $C(1;6)$. M et N sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit G défini par :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
   (b) Calculer les coordonnées du point G
2. (a) A l'aide d'une égalité vectorielle, calculer les coordonnées du point M
   (b) Calculer de la même manière les coordonnées de N
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires. Que peut-on déduire ?
   (b) Montrer que les points C,G et M sont alignés
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice 4:
Soit ABC un triangle du plan. On se place dans le repère (A, B, C).

1. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées des points A', B' et C' dans le repère (A, B, C)
   (b) En utilisant le quadrillage, placer ces trois points.
2. (a) Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
   (b) Que dire des points A,G et A' ?
   (c) Démontrer que les points B,G et B' sont alignés.
   (d) Démontrer que les points C,G et C' sont alignés.
   (e) Construire alors le point G
3. On considère les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$$

   (a) Calculer les coordonnées du point I dans le repère (A, B, C)

(b) Calculer les coordonnées du point J dans le repère (A, B, C)

(c) En utilisant le quadrillage, placer les points I et J.

4. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?

Exercice 5:

1. Proposer un algorithme vérifiant si les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.
2. Proposer un algorithme qui vérifie si les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

Exercice 6:
On considère deux poionts A et B dans le plan et le point R tel que :

$$2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. Que peut-on en déduire concernant les points A, B et R?

Exercice 7:
On considère un triangle quelconque ABC.

1. Faire une figure.
2. On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

(a) En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de vecteurs formés des points A, B et C uniquement.

(b) Que peut-on dire des points A, C et M?

(c) Placer le point M sur la figure.

Exercice 8:
ABC est un triangle. D est le point tel que :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$

Sans faire de figure, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9:
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. M est le point tel que :

$$2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère $AMBC$?

Exercice 10:
$ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et O est le centre du rectangle.

1. Faire une figure.
2. Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Même question avec les vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Exercice 11:
$ABCD$ est un parallélogramme, soient F et E les points tels que :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

1. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 12:
Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points M, N et P tels que:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

Montrer que les droites (DM) et (NP) sont parallèles.

Exercice 13:
Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A et B.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

1. Avec $A(5\,;\,3)$ et $B(4\,;\,4)$.
2. Avec $A(-2\,;\,1)$ et $B(-1\,;\,3)$.
3. Avec $A(-1\,;\,0)$ et $B(-5\,;\,4)$.
4. Avec $A(-2\,;\,-5)$ et $B(0\,;\,2)$.

Exercice 14:

1. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,3)$ et qui a le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(5\,;\,5)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

Exercice 15:

1. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,-4)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(4\,;\,-2)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

Exercice 16:
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on considère les droites d et d' d'équation respective :

$$2x + y + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 3x - y + 1 = 0$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère.
   (b) Tracer la droite d.
2. (a) Trouver deux points à coordonnées entières qui appartiennent à d'.
   (b) Tracer la droite d' dans le repère précédent.

Exercice 17:
On considère un paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et d la droite d'équation :

$$2x - 5y + 2 = 0$$

   Trouver les éventuelles valeurs de m telles que $A \in d$.

   (a) $A(m; -\frac{1}{3})$
   (b) $A(0; m^2)$
   (c) $A(5m; 2m+1)$
   (d) $A(m^2 - 1; m)$

2. Reprendre la question précédente avec la droite d' d'équation $4x + 3y + 5 = 0$

Exercice 18:
Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer l'équation réduite de la droite d parallèle à d' et passant par A
- Tracer d

1. $A(2; 3)$ et $d' : y = -2x - 1$
2. $A(-3; 4)$ et $d' : y = \frac{1}{4}x + 1$

Exercice 19:
Déterminer si les droites (d) et (d'), dont on donne, ci-dessous, des équations cartésiennes, sont parallèles, confondues ou sécantes.

1. On donne : $(d) : -7x - 6y + 5 = 0$ et $(d') : 28x + 24y + 5 = 0$
2. On donne : $(d) : 5x - y - 2 = 0$ et $(d') : -2x - 2y - 4 = 0$
3. On donne : $(d) : 7x + 7y - 7 = 0$ et $(d') : 4x + y + 6 = 0$

Exercice 20:
Déterminer si le couple proposé est solution du système d'équations.

1. Le couple $(-8; -9)$ est-il solution du système $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 4x + 4y = -76 \end{cases}$?
2. Le couple $(-8; 2)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x - 5y = -50 \\ 6x + 2y = -44 \end{cases}$?

Exercice 21:
Résoudre les systèmes d'équations suivants puis interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} -6x + y = 56 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 22x + 7y + 6 = 19x + 5y + 4 \\ 5x - 5y + 5 = 7x - 12 \end{cases}$

Exercice 22:
Résoudre les problèmes suivants :

1. Le périmètre d'un terrain rectangulaire vaut 118 m. Si on augmente la largeur d'un terrain rectangulaire de 10 m et on diminue la longueur de 10 m, l'aire du terrain augmente de 190 m^2. Déterminer les mesures du terrain ?

2. On doit répartir des élèves dans des groupes pour une excursion. Si on met 155 élèves par groupe, alors on au besoin de 5 groupes de moins que si on met 62 élèves par groupe. Combien d'élèves y a-t-il ?

Exercice 23:
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-3;5)$,$B(9;2)$ et $C(2;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Montrer que C n'appartient pas à la droite (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par C et de coefficient directeur $\dfrac{7}{2}$.
4. Déterminer les coordonées du point d'intersection M de cette droite d avec la droite (AB).
5. Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

Exercice 24:
Soient $x,y\in\mathbb{R}$ et d_1, d_2 et d_3 des droites d'équation respective :

- $d_1 : 2x+y+4=0$
- $d_2 : -x+2y-5=0$
- $d_3 : 3x-y+9=0$

1. (a) Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes.
   (b) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de d_1 et d_2.
2. Montrer que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes.

Exercice 25:
Soit $m,x,y\in\mathbb{R}$. On considère la famille de droites $\mathcal{D}_m$ d'équation :
$x+(m-1)y-m=0$.

1. Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_{-1}$.
2. Démontrer que pour tout réel m, la droite $\mathcal{D}_m$ passe par un point A dont on donnera les coordonnées.
3. (a) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ passe par le point $B(3;0)$?
   (b) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
   (c) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 26:
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[OA]$ et soit $A(3;7)$.

1. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer l'abscisse de l'autre point d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses.

Exercice 27:
Une équation d'un cercle $\mathcal{C}$ est donnée pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ par :

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25$$

1. Donner les coordonnées du centre de $\mathcal{C}$ et son rayon.
2. Montrer que le point $A(4;2)$ appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 28:
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $A(-3;-2)$ et passe par la point $C(6;-5)$.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 29:
Un ensemble (E) de points de coordonnées $(x;y)$ est défini par l'équation :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \text{où} \quad a,b,c\in\mathbb{N}$$

1. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la nature de l'ensemble (E):

```python
import math

def ensemble(a,b,c):
    d=...**2+...**2-4*...
    if d...0:
        return "..."
    if d...0:
        return "..."
    if d...0:
        return "..."
```

2. Programmer cette fonction et la tester pour l'ensemble (E) défini par l'équation:
   (a) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 37 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = 0$
3. Remplacer la chaine de caractères renvoyée par la fonction par une liste contenant la nature de l'ensemble, éventuellement accompagnée de ses caractéristiques (coordonnées, rayon, etc...)

1.4 Approfondissements

Exercice 30:
Dans un repère orthonormé du plan, dont l'unité est le kilomètre, un navire suit une route représentée par une droite dont une équation est $x = 0$. Il avance à une vitesse de $25km/h$.

Un phare situé au point de coordonnées $(-6; -2)$ peut être aperçu de n'importe quel endroit dans un rayon de $10km$.

Déterminer le temps pendant lequel le bateau pourra visualiser la lumière du phare.